

### 0.1.3.1 Unidades SI derivadas expresadas a partir de unidades básicas y suplementarias.

Magnitud	Nombre	Otras unidades	Símbolo
Superficie	metro cuadrado		m <sup>2</sup>
Volumen	metro cúbico	1 litro=10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Velocidad	metro por segundo		m/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado		m/s <sup>2</sup>
Número de ondas	metro a la potencia menos uno		m <sup>-1</sup>
Masa en volumen	kilogramo por metro cúbico		kg/m <sup>3</sup>
Velocidad angular	radián por segundo		rad/s
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado		rad/s <sup>2</sup>

- Unidad de **velocidad**: Un **metro por segundo** (m/s o m·s<sup>-1</sup>) es la velocidad de un cuerpo que, con movimiento uniforme, recorre, una longitud de un metro en 1 segundo
- Unidad de **aceleración**: Un **metro por segundo cuadrado** (m/s<sup>2</sup> o m·s<sup>-2</sup>) es la aceleración de un cuerpo, animado de movimiento uniformemente variado, cuya velocidad varía cada segundo, 1 m/s.
- Unidad de **número de ondas**: Un **metro a la potencia menos uno** (m<sup>-1</sup>) es el número de ondas de una radiación monocromática cuya longitud de onda es igual a 1 metro.
- Unidad de **velocidad angular**: Un **radián por segundo** (rad/s o rad·s<sup>-1</sup>) es la velocidad de un cuerpo que, con una rotación uniforme alrededor de un eje fijo, gira en 1 segundo, 1 radián.
- Unidad de **aceleración angular**: Un **radián por segundo cuadrado** (rad/s<sup>2</sup> o rad·s<sup>-2</sup>) es la aceleración angular de un cuerpo animado de una rotación uniformemente variada alrededor de un eje fijo, cuya velocidad angular, varía 1 radián por segundo, en 1 segundo.

### 0.1.3.2 Unidades SI derivadas con nombres y símbolos especiales.

Magnitud	Nombre	Símbolo	Otras unidades	Dimensiones
Frecuencia	hertz	Hz		T <sup>-1</sup>
Fuerza	newton	N	kilopondio=9,8 N dina=10 <sup>-5</sup> N	L·M·T <sup>-2</sup>
Presión	pascal	Pa	Pa=N·m <sup>-2</sup> 1 baria=0,1 Pa 1 bar=10 <sup>5</sup> Pa 1 atmósfera=1,013 10 <sup>5</sup> Pa 1 mm Hg=1,333 10 <sup>2</sup> Pa	L <sup>-1</sup> ·M·T <sup>-2</sup>

Magnitud	Nombre	Símbolo	Otras unidades	Dimensiones
Energía, trabajo, cantidad de calor	julio	J	J=N·m 1 ergio=10 <sup>-7</sup> J 1 electrón-voltio=1,602 10 <sup>-19</sup> J 1 kilovatio-hora=3,6 10 <sup>6</sup> J 1caloría=4,18 J	L <sup>2</sup> ·M·T <sup>-2</sup>
Potencia	vatio	W	W=J·s <sup>-1</sup> 1 caballo de vapor=735,5 w	L <sup>2</sup> ·M·T <sup>-3</sup>
Cantidad de electricidad carga eléctrica	culombio	C		T·I
Potencial eléctrico fuerza electromotriz	volt	V	V=W·A <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> ·M·T <sup>-3</sup> ·I <sup>-1</sup>
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	Ω=V·A <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> ·M·T <sup>-3</sup> ·I <sup>-2</sup>
Capacidad eléctrica	farad	F	F=C·V <sup>-1</sup>	L <sup>-2</sup> ·M <sup>-1</sup> ·T <sup>4</sup> ·I <sup>2</sup>
Flujo magnético	weber	Wb	Wb=V·s	L <sup>2</sup> ·M·T <sup>-2</sup> ·I <sup>-1</sup>
Inducción magnética	tesla	T	T=Wb·m <sup>-2</sup>	M·T <sup>-2</sup> ·I <sup>-1</sup>
Inductancia	henry	H	H=Wb·A <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> ·M T <sup>-2</sup> ·I <sup>-2</sup>

- Unidad de **frecuencia**: Un **hertz** (Hz) es la frecuencia de un fenómeno periódico cuyo periodo es 1 segundo.
- Unidad de **fuerza**: Un **newton** (N) es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene una masa de 1 kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo cuadrado.
- Unidad de **presión**: Un **pascal** (Pa) es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.
- Unidad de **energía, trabajo, cantidad de calor**: Un **joule** (J) es el trabajo producido por una fuerza de 1 newton, cuyo punto de aplicación se desplaza 1 metro en la dirección de la fuerza.
- Unidad de **potencia, flujo radiante**: Un **watt** (W) es la potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo.
- Unidad de cantidad de electricidad, **carga eléctrica**: Un **coulomb** (C) es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de intensidad 1 ampere.
- Unidad de **potencial eléctrico, fuerza electromotriz**: Un **volt** (V) es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre estos puntos es igual a 1 watt.
- Unidad de **resistencia eléctrica**: Un **ohm** (Ω) es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

Por tanto la probabilidad de transmisión a través de la barrera se puede aproximar por:

$$P \cong e^{-2kd}$$

Con esta aproximación se obtienen resultados aceptables:

$$Q \approx 6 \text{ MeV} \rightarrow P \approx 2 \times 10^{-25} \rightarrow \lambda \approx 10^{-3} \text{ s} \rightarrow T_{1/2} \approx 700 \text{ s}$$

$$Q \approx 5 \text{ MeV} \rightarrow P \approx 1 \times 10^{-30} \rightarrow \lambda \approx 10^{-8} \text{ s} \rightarrow T_{1/2} \approx 10^8 \text{ s}$$

Se consigue explicar la gran variación de  $T_{1/2}$  al variar  $Q$  tan sólo en 1 MeV.

Vamos a hallar la **solución exacta**:

La altura de la barrera coulombiana es:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ'e^2}{r}$$

La probabilidad de transmisión a través de una barrera infinitesimal de anchura  $dr$  y altura  $V(r)$  será:

$$dP = \exp\left\{-2dr\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V(r)-Q]}\right\}$$

La probabilidad de penetrar la barrera completa será:

$$P = e^{-2G} \quad G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_a^b dr \sqrt{V(r)-Q}$$

Donde  $G$  es el factor de Gamow que puede ser calculado teniendo en cuenta que:

$$V(r=a) = \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = B \quad V(r=b) = \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 b} = Q$$

Y tomando

$$x = \frac{4\pi\epsilon_0 Q}{zZ'e^2} r = \frac{r}{b} \Rightarrow G = \sqrt{\frac{2mQ}{\hbar^2}} \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 Q} \int_{\frac{a}{b}}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

Y se llega a que la vida media para la desintegración  $\alpha$  de energía cinética  $V_0+Q$ :

$$T_{\frac{1}{2}} = 0.693 \frac{a}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{2(V_0+Q)}} \exp\left\{2\sqrt{\frac{2mc^2}{(\hbar c)^2 Q}} \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{Q}{B}}\right]\right\}$$

Las predicciones reproducen la tendencia, pero difieren en 1-2 órdenes de magnitud en valores que varían en más de 20 órdenes de magnitud.

${}_{90}\text{Th}$		$T_{1/2}(\text{s})$	
A	Q(MeV)	Medido	Calculado

220	8,95	$10^{-5}$	$3,3 \times 10^{-7}$
222	8,13	$2,8 \times 10^{-3}$	$6,3 \times 10^{-5}$
224	7,31	1,04	$3,3 \times 10^{-2}$
226	6,45	$1,85 \times 10^3$	$6,0 \times 10^1$
228	5,52	$6,0 \times 10^7$	$2,4 \times 10^6$
230	4,77	$2,5 \times 10^{12}$	$1,0 \times 10^{11}$
232	4,08	$4,4 \times 10^{17}$	$2,6 \times 10^{16}$

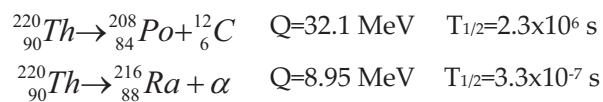
Tenemos en cuenta las aproximaciones hechas en los cálculos:

- La partícula  $\alpha$  no puede estar formada antes de la desintegración en el núcleo, aunque así lo hemos considerado.
- La barrera en  $a$  en realidad es más suave.
- $T_{1/2}$  se correlaciona bien para núcleos par-par.
- Se ha supuesto que el núcleo es esférico, pero los núcleos con  $A \geq 230$  están fuertemente deformados. Un pequeño cambio en  $R$  del 4% significa una variación en  $T_{1/2}$  del orden de 5.
- No se han tenido en cuenta la función de onda inicial y final del núcleo, ni el momento angular de la partícula  $\alpha$

Aunque esta teoría simplificada no es estrictamente correcta, proporciona una buena estimación de las vidas medias de la desintegración  $\alpha$ .

### 1.3.3.1 Emisión de otras partículas o núcleos.

Este modelo explica también el porqué de la emisión de partículas  $\alpha$  y no de partículas de mayor tamaño.

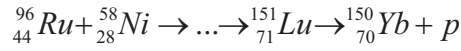


Tendría una vida media  $10^{13}$  veces mayor, luego entonces la emisión de núcleos de  ${}^{12}\text{C}$  no sería fácilmente observable.

$$\left( \frac{\lambda_{{}^{14}\text{C}}}{\lambda_{\alpha}} \right)_{\text{Gamow}} = 10^{-13}$$

Por tanto, la probabilidad de preformación de los clusters de  ${}^{14}\text{C}$  en el interior del núcleo es  $10^{-6}$  veces la probabilidad de que lo estén las partículas  $\alpha$ .

La emisión de protones no se suele observar ya que los valores  $Q$  son generalmente negativos. Se ha observado tras el bombardeo de núcleos pesados:



La teoría de Gamow proporciona estimaciones  $T_{\frac{1}{2}}^{\text{protones}}$  mucho menores que los valores experimentales.

### 1.3.4 Momento angular y paridad.

El núcleo de  ${}^4_2\text{He}$  consiste en dos protones y dos neutrones, todos en estado 1s y con espines que interactúan dos a dos, con lo que  $I_\alpha=0$ . Por lo tanto, el momento angular total transportado por la partícula  $\alpha$  dependerá únicamente del carácter orbital ( $l_\alpha$ ). La función de onda de la partícula  $\alpha$  la representamos por  $Y_{lm}$ , con  $l=l_\alpha$ . Por lo tanto, la paridad asociada con la emisión  $\alpha$  será  $(-1)^{l_\alpha}$ . Así, debido a la regla de selección de la paridad, tendremos que:

$$I_\alpha^\pi = 0^+$$

$$X_i \rightarrow X_f + \alpha$$

Paridad $X_i = \text{Paridad } X_f \rightarrow I_\alpha \text{ par}$ Paridad $X_i \neq \text{Paridad } X_f \rightarrow I_\alpha \text{ impar}$
---

Es decir, se cumplirá:

$ I_i - I_f  \leq l_\alpha \leq I_i + I_f$ $\pi_f = \pi_i (-1)^{l_\alpha}$
---

Además, un estado inicial puede decaer a diferentes estados finales. Algunas veces esta propiedad se conoce como estructura fina de la desintegración  $\alpha$ , pero no tiene nada que ver con la estructura fina atómica.

Si el núcleo tiene espín  $I_i^\pi=0^+$  solamente se observarán las transiciones:

$$0^+ \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0^+ \\ 1^- \\ 2^+ \\ 3^- \\ 4^+ \\ \dots \end{array} \right\}$$

Y no se observarán las transiciones:

donde  $g$  es un parámetro que representa la fracción promedio de la energía transferida a las partículas cargadas secundarias perdida en interacciones radiativas (producción de bremsstrahlung y aniquilación en vuelo en el caso de los positrones) y cuyo comportamiento es:

$$g \begin{cases} \sim 0 & \text{para } Z \text{ y } hv \text{ bajos} \\ \text{Aumenta al crecer } Z \text{ y/o } hv \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} Pb(Z = 82) \\ hv = 10 MeV \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mu_{en}}{\rho} = 0.74 \frac{\mu_{tr}}{\rho} \Rightarrow g = 0,26$$

Debemos notar que si  $\mu / \rho$  y  $\mu_{tr} / \rho$  se basan sólo en la energía del fotón incidente  $hv$  y en el número atómico del medio  $Z$  donde se produce la interacción,  $\mu_{en} / \rho$  debe tener en cuenta el medio a través del cual las partículas cargadas secundarias (electrones y/o positrones) deben frenarse. Convencionalmente, el punto de interacción se asume rodeado por el mismo medio homogéneo, al menos en una distancia igual al rango máximo de los electrones (positrones) secundarios, pero pueden concebirse otras situaciones.

#### Coefficientes de Atenuación en Compuestos y Mezclas.

Para compuesto y mezclas se utiliza la regla de Bragg, de manera que, si  $f_{zi}$  es la fracción en peso del elemento  $i$  en una mezcla o compuesto, y tenemos presentes  $n$  elementos diferentes en la mezcla:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_{mezcla} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_i f_{Z_i} \\ \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{mezcla} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_i f_{Z_i} \\ \left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{mezcla} &\approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_i (1 - g_i) f_{Z_i} \sim \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_i f_{Z_i} \end{aligned}$$

En el caso la expresión para  $(\mu_{en} / \rho)_{mezcla}$ , la ecuación sería exacta si las partículas cargadas secundarias originados en átomos del elemento  $i$  confinaran sus recorridos sólo por zonas con átomos del mismo elemento, pero atravesarán elementos distintos presentes en la mezcla en proporción a sus fracciones en peso. Una expresión exacta sería:

$$\left( \frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{mezcla} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_i \left( 1 - \sum_{j=1}^n f_{Z_j} g_j \right) = \left( \frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{mezcla} (1 - g_{mezcla})$$

Donde:

$$g_{mezcla} = 1 - \sum_j^n f_{Z_j} g_j$$

## **1.6.6 Interacción de neutrones.**

### **1.6.6.1 Propiedades generales.**

Al igual que los rayos gamma, los neutrones no llevan carga, por lo que no pueden interactuar con la materia por medio de la fuerza de Coulomb, la cual domina los mecanismos de pérdida de energía en las partículas cargadas y en los electrones. Los neutrones pueden viajar entonces muchos centímetros a través de la materia sin sufrir ningún tipo de interacción y así pueden ser totalmente invisibles para un detector de tamaño normal. Cuando un neutrón sufre una interacción, esta será con un núcleo del material absorbente. Como resultado de la interacción, el neutrón puede o desaparecer totalmente y ser reemplazado por radiación secundaria, o bien cambiar su energía o dirección de forma significativa.

A diferencia de los rayos gamma, la radiación secundaria resultante de la interacción de los neutrones será casi siempre partículas cargadas pesadas. Estas partículas pueden ser producidas o como resultado de una reacción nuclear inducida por el neutrón, o puede ser el núcleo del material absorbente directamente, el cual ha ganado suficiente energía como resultado de la colisión con el neutrón. La mayoría de los detectores de neutrones utilizan algún tipo de conversión del neutrón incidente en las partículas cargadas secundarias, las cuales si pueden ser detectadas directamente.

Las probabilidades relativas de los distintos tipos de interacción de neutrón cambian mucho dependiendo de la energía del neutrón. Por ello, vamos a dividir los neutrones en dos categorías en base a su energía, los neutrones rápidos y los neutrones lentos, y discutiremos sus propiedades de maneras separadas. La línea de separación entre unos y otros será sobre los 0.5 eV.

### **1.6.6.2 Interacciones de neutrones lentos.**

Para neutrones lentos, la interacción más significativa será la dispersión elástica con los núcleos así como las reacciones nucleares inducidas por neutrones. Debido a la baja energía cinética de los neutrones lentos, muy poca energía puede ser transferida a los núcleos en la dispersión elástica. Consecuentemente, esta no es una interacción en la que basarnos en los detectores de neutrones. Las colisiones elásticas tienden a ser muy probables, y a menudo llevan a los neutrones lentos hacia el equilibrio térmico con el medio absorbente antes de que cualquier otra interacción ocurra. Así, la mayoría de los neutrones lentos se convertirán en neutrones térmicos, los cuales, tendrán una energía de aproximadamente 0.025 eV.

Las interacciones con neutrones lentos que realmente tienen importancia son las reacciones inducidas por neutrones que pueden crear radiaciones secundarias de suficiente energía como para ser detectadas directamente. Ya que la energía de los neutrones es muy baja, todas estas reacciones deben tener un valor de Q positivo, para que puedan ser así energéticamente posibles. En la mayoría de los materiales, la reacción de captura radiativa

- La dispersión se debe a la interacción entre la partícula  $\alpha$  y el núcleo, y sólo es significativa si la trayectoria pasa cerca del núcleo. Esto implica que los choques son raros y por lo tanto el problema es de una única colisión.
- La fuerza entre la partícula  $\alpha$  y el núcleo sigue la ley de Coulomb hasta distancias muy pequeñas.
- Se puede ignorar el efecto de los electrones.

Nosotros para simplificar la discusión vamos a suponer además que el núcleo está fijo en el referencial del laboratorio y por brevedad citaremos los resultados sin dar la demostración. Suponemos que la lámina tiene una espesor  $d$ , y que hay  $n$  átomos por unidad de volumen. La geometría de la colisión se indica en la figura de la página siguiente. El núcleo está fijo en el origen y la partícula  $\alpha$  se aproxima desde la derecha con velocidad inicial  $v$ . Si no hubiera desviación, la partícula pasaría a una distancia  $p$  del núcleo. La distancia  $p$  se denomina *parámetro de impacto*. Después de la dispersión la partícula se ha desviado en un ángulo  $\phi$  y tiene la velocidad final  $v_f$ . Dado que el núcleo se supone inmóvil, tendremos que  $|v| = |v_f| = v$ , y como se conserva el momento angular, es sencillo verificar que

$$\cot(\phi/2) = \frac{2Ep}{zZe^2}$$

donde  $E = mv^2/2$  es la energía de la partícula incidente. Como en un choque frontal la máxima distancia de acercamiento es,

$$a = \frac{zZe^2}{E}$$

Podemos escribir la ecuación como:

$$\cot(\phi/2) = 2p/a$$

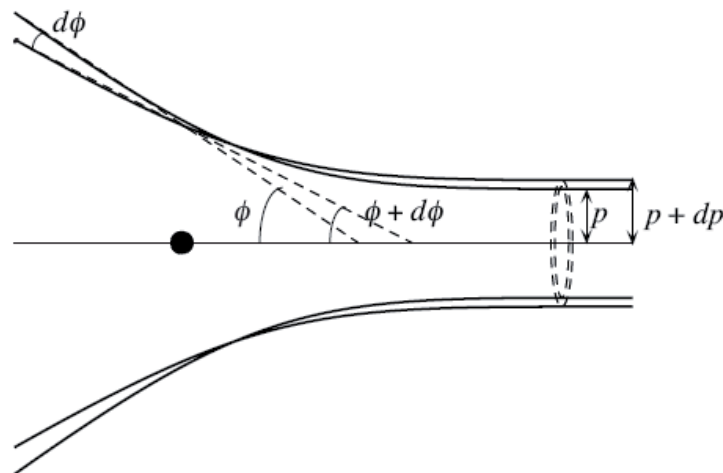


Fig: Dispersión de una partícula  $\alpha$  por un núcleo



A partir de estos resultados es fácil mostrar que la probabilidad por unidad de ángulo sólido de que una partícula  $\alpha$  de energía  $E$  sea dispersada en un ángulo  $\phi$  es:

$$\frac{dP(\phi)}{d\Omega} = \frac{nd}{16} \left( \frac{zZe^2}{E} \right)^2 \csc^4(\phi/2) = \frac{nda^2}{16} \csc^4(\phi/2)$$

donde  $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$ . La ecuación es la famosa **fórmula de dispersión de Rutherford**. Se puede observar que el número de partículas dispersadas es proporcional a  $Z^2$ , de modo que el estudio de la dispersión de partículas  $\alpha$  permite determinar  $Z$ , un dato que no se conocía bien en su tiempo, pues sólo se sabía que  $Z \approx A/2$  gracias a los resultados de la dispersión de rayos X.

Las predicciones de la ecuación fueron verificadas en 1913 por Geiger y Marsden y confirmaron de modo sorprendente dicha fórmula, y así convalidaron el modelo atómico de Rutherford. Corresponde también mencionar que la ecuación vale también en el marco de la Mecánica Cuántica.

### 2.3.6.2. Dispersión hacia adelante

Para analizar la aplicación de la fórmula de Rutherford a los experimentos de dispersión de partículas  $\alpha$  es preciso aclarar primero algunas cuestiones. Se puede ver de la ecuación que cuando  $\phi$  es muy pequeño,  $dP(\phi)/d\Omega$  es mayor que la unidad, y tiende al infinito para  $\phi \rightarrow 0$

Claramente los experimentos indican que esto no ocurre. Pero debemos tener en cuenta que no tenemos derecho de extender la validez de la ecuación a valores muy pequeños de  $\phi$ , porque en ese caso no se cumplen nuestras hipótesis básicas: primero porque no se puede ignorar el efecto de los electrones, segundo porque no es cierto que la desviación total es el resultado de una única colisión. El principal efecto de los electrones (además de ocasionar ellos mismos dispersiones múltiples) es el de "apantallar" la carga nuclear, de forma que una partícula  $\alpha$  que pasa lejos del núcleo no experimenta toda la repulsión Coulombiana del mismo. Si bien por ahora no sabemos cómo es la distribución de carga debida a los electrones, lo que sí sabemos es que a una distancia del núcleo del orden del radio atómico  $R$ , el apantallamiento es completo y por lo tanto las partículas  $\alpha$  que inciden con parámetros de impacto mayores que  $R$  no experimentan desviación. Si el número de átomos por unidad de área del blanco es bajo, de manera que  $nd\pi R^2 < 1$ , entonces la probabilidad de dispersión es menor que la unidad. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con blancos gaseosos de poco espesor (un blanco gaseoso de 1 cm de espesor a  $10^{-2}$  mm Hg contiene aproximadamente  $4 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>2</sup>, luego  $nd\pi R^2 \approx 0.1$ ). En cambio cuando  $nd\pi R^2 > 1$  ocurre dispersión múltiple. En este caso, la probabilidad total de dispersión no es igual a la probabilidad de dispersión por átomo multiplicada por el número de átomos en el

blanco, pues una vez que una partícula  $\alpha$  ha chocado una vez, los choques subsiguientes no aumentan la probabilidad de dispersión sino que solamente modifican la desviación, como ya se vio anteriormente.

Por lo tanto, para láminas metálicas, la distribución angular de las partículas  $\alpha$  dispersadas varía con continuidad desde la distribución de Rutherford para ángulos grandes hasta la distribución de dispersión múltiple para ángulos pequeños, de modo tal que la probabilidad total de dispersión es siempre igual o menor que la unidad.

### 2.3.6.3 El tamaño del núcleo

La fórmula de Rutherford se obtuvo suponiendo que el núcleo y las partículas  $\alpha$  son cargas puntuales. Esta aproximación vale siempre y cuando la distancia de máximo acercamiento sea mayor que el radio del núcleo. En consecuencia se puede decir que el radio del núcleo debe ser *seguramente menor* que el valor más pequeño del acercamiento máximo para el cual la ecuación da todavía el valor correcto del número de partículas  $\alpha$  dispersadas.

En la dispersión de las partículas  $\alpha$  emitidas por el radio (  $E = 5.3\text{MeV}$  ) por un blanco de cobre (para el cual  $Z = 29$ , como se deduce a partir del número de partículas dispersadas) se observó que la ley vale hasta  $180^\circ$ . En este caso se deduce que

$$a = 1.58 \times 10^{-12} \text{ cm}$$

y por lo tanto se concluye que el radio del núcleo del cobre es menor o igual que dicha cantidad.

### 2.3.6.4 Comentarios sobre el modelo de Rutherford

En conclusión, los experimentos de Rutherford demostraron que el átomo contiene un núcleo de muy pequeñas dimensiones (radio menor o igual a  $10^{-12}$  cm), donde reside toda la carga positiva y casi toda la masa del átomo. También mostraron que la carga positiva, medida en unidades de la carga electrónica, es decir el número  $Z$ , es igual (dentro del error experimental) al número atómico del elemento.

Por todo ello Rutherford propuso un modelo en el que el átomo está formado por un núcleo con una carga positiva igual a  $Ze$ , alrededor del cual giran  $Z$  electrones, de manera que su movimiento equilibra dinámicamente la atracción Coulombiana que sobre ellos ejerce el núcleo. La extensión del movimiento electrónico determina que el tamaño del átomo sea de aproximadamente  $10^{-8}$  cm. Este concepto sugiere que las propiedades químicas de un elemento están determinadas por el número de electrones de sus átomos (y no por la masa atómica, como se pensaba hasta entonces), y también sugiere que deben existir elementos para todos los valores posibles de  $Z$ , hasta que  $Z$  se hace demasiado grande y el núcleo se vuelve inestable pues probablemente ya no puede mantener más carga positiva en su interior.

Sin embargo, es evidente que el modelo todavía es incompleto y presenta serias fallas. En primer lugar no se da todavía ninguna idea acerca de cómo los electrones

determinan las propiedades químicas. En segundo lugar tampoco se explica porqué todos los átomos de una misma especie tienen aparentemente el mismo tamaño, y además, porqué los átomos de especies muy distintas tienen casi exactamente el mismo tamaño. Comentaremos este asunto en la siguiente Sección. Por último, el modelo enfrenta una objeción aún más grave: al girar alrededor del núcleo, los electrones sufren una aceleración continua y por lo tanto deberían irradiar ondas electromagnéticas y perder energía, y en consecuencia caer en espiral hacia el núcleo. Veremos más adelante que la solución de esta dificultad requiere abandonar la física clásica.

### 2.3.7 La constante que está faltando

Consideremos el caso más sencillo, el del átomo de Hidrógeno, pues es suficiente para entender la esencia de la dificultad de explicar los tamaños atómicos. Supongamos que el electrón gira alrededor del núcleo en una órbita circular. La fuerza centrípeta es la fuerza de Coulomb y por lo tanto tendremos

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

que nos da la relación

$$rv^2 = \frac{e^2}{m}$$

En esta ecuación  $r$  puede tener cualquier valor, pues la ecuación sólo nos dice que si escalamos  $r$  por un factor  $k^2$  es necesario escalar  $v$  por el factor  $k^{-1}$ . Se puede verificar que la ecuación equivale a la Tercera Ley de Kepler.

El origen del problema reside en que las únicas constantes que intervienen en el modelo clásico del átomo de Rutherford son la carga y la masa del electrón, y con ellas no podemos formar una longitud característica.

Existe una manera de combinar  $e$  y  $m$  con una constante universal clásica, de modo de formar una longitud, y es usar la velocidad de la luz,  $c$ . Se construye así la constante

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

Esta longitud es el *radio clásico del electrón*, que ya mencionamos en conexión con la dispersión Thomson, pero no tiene nada que ver con las dimensiones atómicas, ya que surge de comparar el equivalente energético de la masa del electrón con la energía del campo eléctrico del mismo electrón. Es obvio que la velocidad de la luz puede intervenir sólo cuando se consideran efectos relativísticos, y este *no* es el caso del átomo pues se ve de inmediato a partir de la ecuación que si  $r \approx 10^{-8} \text{ cm}$  resulta que  $v \ll c$ .

Adelantándonos a lo que veremos más adelante en detalle, es fácil ver que el dilema se resuelve si introducimos la constante de Planck  $h$  ( $h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ ). Es posible entonces formar la longitud

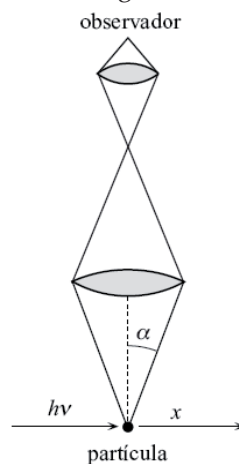
$$\Delta r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = a_0$$

Es decir  $r=a_0$ . Por lo tanto:

El radio de Bohr, que nos da el tamaño del átomo de hidrógeno, se obtiene pidiendo que la energía del átomo tenga el mínimo valor compatible con el principio de incertidumbre.

### 2.6.6 Interpretación física de Heisenberg del principio de incertidumbre

En nuestra presentación, el principio de incertidumbre surge como una consecuencia matemática de la hipótesis de Broglie, que asocia a cada partícula una onda prueba que describe su movimiento. Pero debemos recordar que cuando Werner Heisenberg introdujo en 1927 el principio de incertidumbre, sus argumentos no se basaron en la hipótesis de Broglie, sino en las propiedades corpusculares de la radiación electromagnética y sus consecuencias sobre el proceso de medición. De esta forma, Heisenberg puso de manifiesto que existe un límite natural insuperable a la precisión con la que se pueden medir simultáneamente la posición y el impulso de una partícula, debido a que *la medición de una de estas cantidades inevitablemente perturba a la partícula de modo tal que deja incierto el valor de la otra cantidad*. Este es el origen físico del principio de incertidumbre.



Microscopio de Heisenberg

La naturaleza de los argumentos de Heisenberg se entiende si examinamos un "experimento de pizarrón" ideado por Bohr en 1928. Consideremos el dispositivo de la Fig. 6.3. Con el microscopio se desea determinar la posición instantánea de la partícula, que podemos ver por medio de los fotones que dispersa cuando se la ilumina. El poder de resolución del microscopio es  $\lambda / \text{sen} \alpha$  ( $\lambda$  es la longitud de onda y  $\alpha$  es el semiángulo subtendido por el objetivo del microscopio), por lo tanto la indeterminación de la medida es

$$\Delta x \cong \frac{\lambda}{\text{sen}\alpha}$$

Supongamos que basta ver un fotón para llevar a cabo la medida. Claramente, el microscopio capta el fotón cuando éste es dispersado en un ángulo comprendido entre  $-\alpha$  y  $+\alpha$ . Luego la incertidumbre de la componente  $x$  del impulso del fotón después de la dispersión es

$$(\Delta p_x)_{\text{fotón}} = 2 p \text{sen}\alpha = 2h \text{sen}\alpha / \lambda$$

pues  $p_{\text{fotón}} = h / \lambda$ . Ahora bien, como la componente  $x$  del impulso del fotón se puede conocer exactamente antes de la dispersión (no hace falta conocer la coordenada  $x$  del cuanto), la conservación de la cantidad de movimiento implica que la partícula adquiere un impulso cuya magnitud es incierta en una cantidad igual a la incertidumbre del impulso del fotón, es decir

$$\Delta p_x = (\Delta p_x)_{\text{fotón}} = 2h \text{sen}\alpha / \lambda$$

Por lo tanto, en el instante de la medición tenemos que

$$\Delta x \Delta p_x \approx 2h > h$$

Si se usa luz de longitud de onda más corta, la medida de la posición es más precisa, pero al mismo tiempo aumenta la incertidumbre del impulso de la partícula.

Esta discusión muestra que el principio de incertidumbre es consecuencia de la cuantificación de la radiación electromagnética, y se origina porque para observar la partícula es preciso dispersar por lo menos *un* fotón. En otras palabras, es imposible observar la partícula por medio de una iluminación que le imparta un impulso arbitrariamente pequeño. Debido a la cuantificación, el fotón es el intermediario indispensable entre la partícula y el instrumento de medida, y perturba la partícula de una manera incontrolable e impredecible. Por lo tanto es imposible, después de la medida, conocer con exactitud la posición y la cantidad de movimiento de la partícula. Las relaciones de incertidumbre expresan que la constante de Planck es la medida de la *magnitud mínima* de esa perturbación incontrolable.

### 2.6.7 La relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo

Consideremos un grupo de ondas del tipo

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x') e^{-i\varphi(k_x')} e^{i(k_x' x - \omega' t)} dk_x' \quad \omega' = \omega(k_x')$$

cuya longitud es  $\Delta x$ . El tiempo que necesita el grupo para recorrer la distancia  $\Delta x$  es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{\Delta x}{v_x}$$

donde  $v_x$  es la componente  $x$  de la velocidad de la partícula. Por lo tanto  $\Delta t$  es la incertidumbre con la cual se conoce el instante en el cual el grupo pasa por un determinado

- Mecánica cuántica relativista para el electrón.
- Teoría de perturbaciones a primer orden. Para ello debe cumplirse que  $Z\alpha \ll 1$ ; es decir, es válido para núcleos ligeros.
- No hay retroceso del núcleo.
- La carga eléctrica nuclear es puntual.
- El espín nuclear es cero.

Si observamos las observaciones aquí expuestas, vemos que se asume en la expresión de Mott que la carga nuclear es puntual. Por lo tanto, no podremos obtener una expresión para la distribución de carga nuclear, que es lo que estamos buscando. Para incluir la distribución de carga nuclear se recurre a un análogo de la óptica clásica, cuando se deriva el patrón de difracción de Fraunhofer de una abertura tomando la transformada de Fourier de la pantalla. La dispersión del electrón por la abertura se sustituye por una distribución esférica de carga. Tenemos el núcleo con carga eléctrica  $+Ze$ . La expresión que se utiliza es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Mott} |F(q^2)|^2$$

donde  $F(q^2)$  es el factor de forma y  $q$  es el momento transferido. Si se realiza un estudio de la dispersión, podemos ver que el momento transferido es, llamando  $p$  al momento inicial del electrón y  $p^*$  al momento final de electrón:

$$|\vec{q}| = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

La expresión del factor de forma es en realidad la transformada de Fourier de la distribución de carga nuclear  $\rho(\vec{r})$ :

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}$$

Observamos pues de la expresión del factor de forma que:

- Si:  $q \rightarrow 0 \Rightarrow F(q^2) \rightarrow 1$   
y la dispersión no es diferente de la dispersión producida por un núcleo puntual. A medida que el momento transferido  $q$  crece la naturaleza oscilatoria de la exponencial dentro de la integral para un núcleo extenso reduce el valor del factor de forma  $F(q^2)$  del valor unidad y la dispersión se reduce. Esto es lógico; una carga eléctrica extendida tiene mayores dificultades en coger momento transferido que una distribución puntual con el mismo valor de la carga eléctrica.
- Como el valor del radio es muy pequeño ( $R < 10^{-14}\text{m}$ ), si queremos estimar el valor del momento transferido  $q$  para ver una distribución significativa en la intensidad de dispersión debido al tamaño, debemos de tener en cuenta que  $\vec{q}\vec{r}/\hbar \sim 1$ . Por lo tanto,  $q \sim \hbar/R > 20 \text{ MeV}/c$ . Alcanzar este valor para un ángulo de  $30^\circ$  requiere electrones incidentes de  $40 \text{ MeV}$ . Si queremos una resolución de  $1/\text{m}$ , entonces  $q \sim \hbar / 1 \text{ fm} \sim 200 \text{ MeV}/c$ . Las

primeras medidas detalladas se realizaron con electrones de 150 MeV. Más tarde, se han alcanzado energías de 500 MeV.

Por lo tanto, vemos que una vez obtenido el factor de forma  $F(q)$ , hallaríamos la transformada inversa de Fourier del factor de forma, obteniendo así la distribución de carga nuclear  $\rho(r)$ . Pero  $F(q^2)$  no se da analíticamente. El modo de actuar es suponer una cierta función  $\rho(r)$  con unos parámetros ajustables. Obtenemos su correspondiente factor de forma y, ajustando los parámetros a través de resultados experimentales vemos que tal responde el ajuste.

En general, la función densidad se normaliza, de manera que:

$$4\pi \int \rho(\vec{r}) r^2 dr = 1$$

Además, normalmente la distribución de carga se supone con simetría esférica, de manera que  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ . Además, la última integral es, en caso de ser la distribución esférica de carga de simetría esférica, un integral impar, y por lo tanto se anula. Entonces:

$$F(q^2) = 2\pi \int r^2 dr \cos[qr \cos \theta] \rho(r) d \cos \theta = 2\pi \int r^2 dr \frac{2 \operatorname{sen}(qr)}{qr} \rho(r) = \frac{4\pi}{q} \int r dr \operatorname{sen}(qr) \rho(r)$$

En el caso de que  $qr \ll 1$  (esto es, ángulos de dispersión  $\theta$  pequeños o bajo momento transferido), entonces:

$$\operatorname{sen}(qr) = qr - \frac{1}{3!}(qr)^3 + \dots \approx qr - \frac{1}{3!}(qr)^3$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$F(q^2) \approx 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle$$

donde se define el radio cuadrático medio como:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr$$

Es decir, en el ámbito de  $qr \ll 1$ , el núcleo se ve como un todo y sólo podemos obtener  $\langle r^2 \rangle$ . No obtenemos información sobre la función de distribución de carga nuclear  $\rho(r)$ .

Veamos algunos ejemplos de distribuciones de carga nuclear:

1. En primer lugar veamos el caso de una *distribución de esfera dura de densidad constante*. En este caso, la función es:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

En este caso, si normalizamos la función densidad obtenemos:

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{a^3}$$

y, para el factor de forma obtendríamos:

Imaginemos ahora realizar el mismo proceso en dos etapas: un paso a volumen constante y el otro a temperatura constante. La variación de energía es entonces

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_V d\theta + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_\theta dV = C_V d\theta - \eta C_V dV \quad (7.95)$$

El segundo paso involucra solamente las definiciones de  $C_V$  y  $\eta$ , más la Primera Ley para relacionar  $(\partial E/\partial V)_\theta$  con el coeficiente de Joule  $\eta$ . Si ahora eliminamos  $dE$  entre (7.94) y (7.95) se obtiene

$$C_V d\theta - C_V dV = -p dV \quad (7.96)$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma que buscamos. Para integrarla tenemos que expresar  $C_V$ ,  $\eta$  y  $p$  como funciones de  $\theta$  y  $V$ . Ahora sí vemos claramente el papel de la Segunda Ley en la deducción anterior: intervino para relacionar  $C_V$  y  $\eta$  con la ecuación de estado. En efecto, si usamos la ec. (7.66) en la (7.96), recuperamos de inmediato la ec. (7.91) que fue nuestro anterior punto de partida. Pero si tenemos información experimental sobre  $C_V$  y  $\eta$  podemos usar la ec. (7.96) sin invocar a la Segunda Ley. Este es justamente el caso del gas ideal, para el cual  $(\partial E/\partial V)_\theta = 0$  por definición, luego  $\eta = 0$ , y además  $C_V$  es función solamente de  $\theta$ . Por lo tanto para un gas ideal la ec. (7.96) se transforma, *sin haber usado la Segunda Ley*, en:

$$C_V d(\ln \theta) + nR d(\ln V) = 0 \quad (7.97)$$

que es exactamente lo mismo que la (7.92). La integración se puede hacer de inmediato y se obtiene la ec. (7.93), con  $\theta$  en lugar de  $T$ .

Este ejemplo muestra que si bien no se corre ningún riesgo si se usan juntas a la Primera y la Segunda Ley cuando sólo una de ellas es suficiente, se oscurece el hecho (muchas veces poco aclarado) de que las dos Leyes son esencialmente independientes entre sí, y que ciertos resultados dependen en realidad de una sola de ellas y no de ambas.

La ecuación de las adiabáticas de un gas ideal se puede escribir en términos de  $p$  y  $V$  (o bien de  $p$  y  $T$ ) usando la ec. (7.90) y recordando que para un gas ideal  $\tilde{c}_p - \tilde{c}_v = R$ ; se obtiene así

$$pV^\gamma = \text{cte}, \quad \gamma = \tilde{c}_p / \tilde{c}_v \quad (7.98)$$

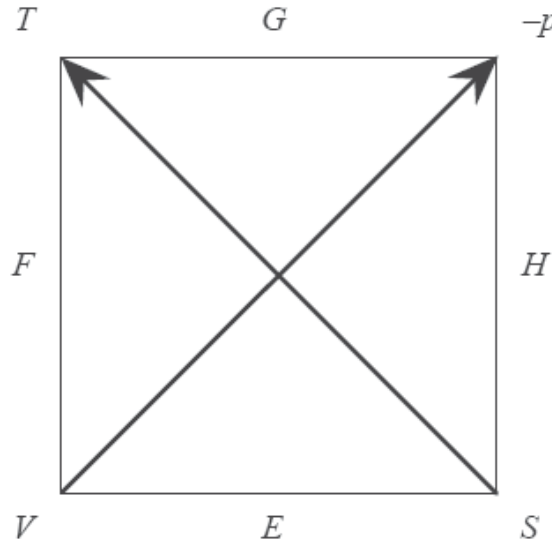
que es una forma usual de presentar la ecuación de las adiabáticas de un gas ideal. La cantidad  $\gamma$  se denomina índice adiabático del gas.

### 5.7.3.7 Potenciales termodinámicos y métodos de cálculo

Hemos visto la mayoría de las técnicas que permiten establecer relaciones entre una función termodinámica y otra, de manera que las propiedades de un sistema se puedan dar explícitamente en términos de una capacidad calorífica determinada, y de varias derivadas parciales que se obtienen a partir de la ecuación de estado. Puede ser útil recapitular estas



técnicas en un conjunto de recetas, que el lector podrá aplicar a cada caso específico que se le presente. Para no complicarnos daremos nuestras recetas para un sistema en cuya descripción intervienen  $T$ ,  $S$  y un par de variables mecánicas que tomaremos como  $-p$  y  $V$ . Podrían ser también el campo magnético  $H$  y la magnetización  $M$  para un sistema magnético, la tensión  $J$  y la longitud  $L$  para un resorte, etc.. Es fácil generalizar nuestras fórmulas para el caso en que varios pares de variables mecánicas están presentes.



Nos ayudaremos mediante una técnica mnemónica basada en la Fig. 7.2. Las cuatro variables  $T$ ,  $S$ ,  $-p$  y  $V$  se encuentran en los vértices del cuadrado y los cuatro potenciales termodinámicos asociados están en los lados, de modo que las variables naturales de un dado potencial le son adyacentes. Las flechas relacionan las otras variables con las derivadas parciales del potencial, y la dirección de las flechas indica el signo. Por ejemplo

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T, \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p, \text{ etc. (7.99)}$$

Las flechas indican también la naturaleza de las varias relaciones de Maxwell, por ejemplo

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T, \text{ etc (7.100)}$$

En este caso las flechas conectan el numerador de la derivada parcial con el subscrito que indica la variable que se mantiene constante en la derivada parcial, y su dirección indica nuevamente el signo.

Con la ayuda del diagrama podemos formular una estrategia para expresar cualquier variación de una variable termodinámica en términos de cantidades que se pueden determinar experimentalmente, tales como

$$C_{V,p}, \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\alpha_p, \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -VK_T, \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = p\alpha_V \quad (7.101)$$

es decir una capacidad calorífica y cantidades que provienen de la ecuación de estado que vincula  $(p, V, T)$ . Tanto  $C_V$  como  $C_p$  se pueden considerar como básicos (generalmente  $C_p$  es el que se determina experimentalmente):

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (7.102)$$

y su relación está dada en términos de cantidades que se obtienen de la ecuación de estado (ver arriba):

$$C_p - C_V = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = pVT \alpha_p \alpha_V \quad (7.103)$$

Es fácil verificar que las propiedades termomecánicas  $\alpha_V$ ,  $\alpha_p$  y  $K_T$  no son independientes, sino que entre ellas se cumple la relación

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_V K_T} = p \quad (7.104)$$

de modo que basta conocer dos de ellas. A continuación recordamos las tácticas que podemos usar para expresar una cierta derivada parcial dada en términos de cantidades medibles.

(a) Reemplazar las derivadas parciales de los potenciales respecto de sus variables adyacentes en la Fig. 7.2 por sus variables relacionadas (siguiendo las flechas, por ejemplo:  $(\partial F / \partial T)_V = -S$ , etc.).

(b) Reemplazar una derivada parcial de un potencial con respecto de una variable no adyacente, que se puede obtener de su ecuación básica. Por ejemplo, de  $dF = -SdT - pdV$  podemos obtener

$$\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_S = -S \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S - p, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)_p = -S \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_p - p \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p, \text{ etc.} \quad (7.105)$$

(c) Usar una o más de las relaciones de Maxwell (que podemos recordar usando la Fig. 7.2).

(d) Usar las propiedades básicas de las derivadas parciales, por ejemplo, que si  $z=z(u)$  y  $u=u(x,y)$ , se tiene que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = \frac{(\partial u / \partial x)_y}{(\partial u / \partial z)_y} = 1 / \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \frac{(\partial z / \partial y)_x}{(\partial z / \partial x)_y} \quad (7.106)$$

y

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right]_x \Big|_y = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right]_y \Big|_x \quad (7.107)$$

Con la ayuda de estas tácticas, las estrategias convenientes son:

- (1) si un potencial es una variable independiente en la derivada parcial dada, transformarlo en variable dependiente usando (d) (“llevarlo al numerador”) y entonces usar (a) o (b) para eliminar el potencial.
- (2) si la entropía es una variable independiente en la derivada parcial dada, o de resultados del paso anterior, llevar  $S$  al numerador y eliminarla usando (c) o bien las (7.106) y (7.107).
- (3) si las derivadas parciales medidas en la ecuación de estado tienen a  $V$  en el numerador, usar (d) en el resultado de aplicar los pasos anteriores para llevarlo al numerador.
- (4) si la ecuación de estado es de la forma  $p=f(V,T)$ , llevar  $p$  al numerador.

El resultado de estos procesos será una expresión de la derivada parcial que nos interesa en términos de cantidades medidas o medibles.

$$\rho = \frac{p}{p_C}, \quad v = \frac{V}{V_C}, \quad \tau = \frac{T}{T_C} \quad (10.4)$$

y sustituimos en la (9.1) resulta

$$\left(\rho + \frac{3}{v^2}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau \quad (10.5)$$

Esta ecuación sólo contiene constantes numéricas y por lo tanto es independiente de la sustancia. Los estados determinados por los mismos valores de  $\rho$ ,  $v$  y  $\tau$  se denominan "estados correspondientes", y la ec. (10.5) se suele llamar *ecuación de los estados correspondientes*.

### 5.10.3 La ecuación de estado virial

Esta es una ecuación muy importante, que se escribe en la forma de una serie infinita:

$$p\tilde{v} = RT\left(1 + \frac{B}{\tilde{v}} + \frac{C}{\tilde{v}^2} + \dots\right) \quad (10.6)$$

Los coeficientes  $B$ ,  $C$ , ... se denominan *coeficientes viriales* y dependen sólo de  $T$ . Otra forma de la ecuación virial, de uso frecuente es:

$$p\tilde{v} = RT + B'p + C'p^2 + \dots \quad (10.7)$$

Donde los coeficientes  $B'$ ,  $C'$ , ... también dependen sólo de la temperatura. Siempre que tratemos la (10.6) y la (10.7) como series infinitas (y no polinomios) se puede demostrar que hay una relación bien definida entre sus coeficientes:

$$B = B' \quad C = B'^2 + RTC', \text{ etc.} \quad (10.8)$$

Aunque a primera vista parecería que la ecuación virial no es más que un ejemplo del método usual de representar funciones complicadas mediante series infinitas, es mucho más que eso, pues tiene una firme base teórica y cada coeficiente virial tiene una interpretación física bien definida en términos de las interacciones entre las moléculas del gas. En la práctica, no se puede usar la serie completa porque solamente se conocen un número finito de valores experimentales, y porque es muy difícil calcular teóricamente los coeficientes viriales más elevados. Por ese motivo se usan sólo pocos términos de la serie, y ésta se emplea únicamente para presiones y densidades moderadas, donde converge rápidamente. Insistimos sin embargo que todo esto es irrelevante a los fines de la Termodinámica. Además de las ecuaciones de estado mencionadas, se han propuesto muchas otras, algunas de las cuales pueden ser más útiles en determinadas circunstancias para representar datos empíricos. Pero las que hemos considerado tienen cierta importancia

fuera del ámbito termodinámico: la ecuación virial porque se funda en la teoría molecular de la materia, y la ecuación de van der Waals porque pese a su sencillez describe correctamente el comportamiento cualitativo de los fluidos. Como ilustración vamos a calcular el efecto de la presión y el volumen sobre las capacidades caloríficas de un gas real, y el coeficiente de Joule-Thomson de un gas real.

### 5.10.4 Las capacidades caloríficas de un gas real

Aquí usaremos la ecuación de van der Waals. Recordemos que para un gas ideal tanto  $\tilde{c}_p$  como  $\tilde{c}_v$  dependen solo de la temperatura. Estudiaremos primero  $(\partial\tilde{c}_v/\partial\tilde{v})_T$ , que por la (7.52) es

$$\left(\frac{\partial\tilde{c}_v}{\partial\tilde{v}}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{\tilde{v}} \quad (10.9)$$

Si escribimos la ecuación de van der Waals en la forma

$$p = \frac{RT}{\tilde{v}-b} - \frac{a}{\tilde{v}^2} \quad (10.10)$$

vemos en seguida que  $(\partial p^2/\partial T^2) = 0$ . Luego para un gas de van der Waals  $\tilde{c}_v$  es función sólo de la temperatura, igual que para un gas ideal.

Sin embargo, la situación es muy diferente para  $\tilde{c}_p$ . De la ec. (7.53) tenemos

$$\left(\frac{\partial\tilde{c}_p}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial T^2}\right)_p \quad (10.11)$$

Para calcular  $\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial T^2}\right)_p$  diferenciamos la (10.10) a presión constante

$$0 = \frac{R}{\tilde{v}-b} - \left(\frac{RT}{(\tilde{v}-b)^2} - \frac{2a}{\tilde{v}^3}\right)\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial T}\right)_p \quad (10.12)$$

Esta ecuación se puede resolver para  $\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial T}\right)_p$  y luego diferenciar nuevamente. Resulta una

expresión bastante complicada que contiene a  $\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial T^2}\right)_p$  y  $\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial T}\right)_p$ . Esta última se puede eliminar usando la (10.12) y finalmente obtenemos:

$$\left(\frac{\partial\tilde{c}_p}{\partial p}\right)_T = \frac{4a}{RT^2}\left(\frac{\tilde{v}-b}{\tilde{v}}\right)^3 \left[ \frac{3(\tilde{v}-b)}{2\tilde{v}} - 1 \right] \left[ -1 - \frac{2a}{RT\tilde{v}}\left(\frac{\tilde{v}-b}{\tilde{v}}\right)^2 \right]^{-3} \quad (10.13)$$

Si eliminamos  $a$  y  $b$  a favor de  $\tilde{v}_c$  y  $T_c$  se obtiene la forma equivalente

$$\left(\frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial p}\right)_T = \frac{9}{2} \frac{T_c \tilde{v}_c}{T^2} \left(1 - \frac{\tilde{v}_c}{3\tilde{v}}\right)^3 \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\tilde{v}_c}{3\tilde{v}}\right) - 1\right] \left[-1 - \frac{9}{4} \frac{T_c \tilde{v}_c}{T\tilde{v}} \left(1 - \frac{\tilde{v}_c}{3\tilde{v}}\right)^2\right]^{-3} \quad (10.14)$$

Esta expresión complicada muestra que para un gas de van der Waals,  $\tilde{c}_p$  depende del volumen (o la presión), además de depender de la temperatura. El signo de  $\left(\frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial p}\right)_T$  puede

ser positivo o negativo y  $\left(\frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial p}\right)_T$  puede incluso diverger si se anula el último corchete de la (10.13) o de la (10.14).

### 5.10.5 El coeficiente de Joule-Thomson

En este caso usaremos la ecuación de estado virial. De la ec. (7.73) tenemos

$$\mu \tilde{c}_p = T \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p - \tilde{v} \quad (10.15)$$

Diferenciamos la (10.7) para encontrar  $\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p$

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{P} + \frac{dB'}{dT} + p \frac{dC'}{dT} + \dots \quad (10.16)$$

y de aquí obtenemos

$$\mu \tilde{c}_p = - \left( B' - T \frac{dB'}{dT} \right) - p \left( C' - T \frac{dC'}{dT} \right) + \dots \quad (10.17)$$

El coeficiente de Joule-Thomson puede ser tanto positivo como negativo, según sean los valores de  $\tilde{v}$  y  $T \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p}\right)_T$ . Para un gas ideal es nulo, como se ve de la (10.17), pero para todo

gas real depende en general de la temperatura y la presión. Para una presión dada, el valor para el cual  $\mu$  cambia de signo se denomina el *punto de inversión* de Joule-Thomson. El límite de presión nula del punto de inversión se denomina *temperatura de inversión* de Joule-Thomson. Si representamos en un diagrama  $T-p$  a los puntos de inversión se obtiene la *curva de inversión* (ver Fig. 10.3). Por supuesto, la ec. (10.16) sólo describe la parte superior, de presiones bajas, de la curva de inversión. Si se quiere describir el comportamiento de los gases reales a presiones altas es necesario incluir más coeficientes viriales. La región donde  $\mu > 0$  es aquella en la cual la temperatura del gas disminuye en una expansión de Joule-Thomson.

Por encima de la temperatura de inversión  $T_{J-T}$  el gas no se puede enfriar mediante una expansión de esta clase (algunos valores de  $T_{J-T}$  son 621 °K para nitrógeno y 202 °K para

La intensidad de la fuerza entre los quarks es mayor que la fuerza nuclear; pero esta última es consecuencia de la primera. Las interacciones entre quarks se llaman cromodinámicas, porque son debidas al "color".

**Supersimetría: Nexos entre bosones y fermiones**

La supersimetría sería la simetría que nos permitiría pasar de un fermión a un bosón y viceversa.

Partícula	Espín	Compañera supersimétrica	Espín
Fotón	1	Fotito	1/2
W±	1	Wino	1/2
Z <sup>0</sup>	1	Zino	1/2
Gluones	1	Gluinos	1/2
Quarks	1/2	Esquarks	0
Leptones	1/2	Esleptones	0

Si la supersimetría estuviese presente a las energías actuales, la masa del es-electrón sería la misma que la del electrón, y aún no ha sido detectada ninguna partícula así, se dice que la supersimetría está "rota". No hay hasta ahora evidencia experimental del resto de las partículas supersimétricas.

**Tablas de partículas**

**Leptones:** Los valores de masa, espín y vida media son iguales para partículas y antipartículas, pero la carga eléctrica y el número leptónico tendrán valores opuestos. El nº bariónico es nulo.

Fecha (Descubrimiento)	Partícula	Carga eléctrica	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Espín	Vida media (segundos)	Número (leptónico)
1897	e <sup>-</sup>	-1	0.51	1/2	Estable	L <sub>e</sub> =1
1953	ν <sub>e</sub>	0	<17·10 <sup>-6</sup>	1/2	Estable	L <sub>e</sub> =1
1936	μ <sup>-</sup>	-1	105.66	1/2	2.2·10 <sup>-6</sup>	L <sub>μ</sub> =1
1961	ν <sub>μ</sub>	0	<0.27	1/2	Estable	L <sub>μ</sub> =1
1975	τ	-1	1784	1/2	3·10 <sup>-3</sup>	L <sub>τ</sub> =1
	ν <sub>τ</sub>	0	<35	1/2	?	L <sub>τ</sub> =1

**Bariones estables (hadrones):** Tienen nº bariónico igual a 1. Las antipartículas tendrán valores de masa, espín, y la vida media iguales a los de las correspondientes partículas; las cargas eléctricas tienen valores opuestos, y el nº bariónico igual a -1; en cuanto a los constituyentes, basta sustituir quarks por antiquarks. La paridad intrínseca de las partículas de la tabla es igual a 1; y la de las antipartículas correspondientes igual a -1.

Partícula	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Espín	Vida media (segundos)	Composición en quarks	Carga eléctrica
p	938.27	½	>5·10 <sup>22</sup> años	uud	1
n	939.57	½	888.6 ± 3.5 s	udd	0
Λ <sup>0</sup>	1115.6	½	2.6·10 <sup>-10</sup>	uds	0
Σ <sup>+</sup>	1189.4	½	0.8·10 <sup>-10</sup>	uus	1
Σ <sup>0</sup>	1192.5	½	7.4·10 <sup>-10</sup>	uds	0
Σ <sup>-</sup>	1197.4	½	1.5·10 <sup>-10</sup>	dds	-1
Ξ <sup>0</sup>	1314.9	½	2.9·10 <sup>-10</sup>	uss	0
Ξ <sup>-</sup>	1321.3	½	1.6·10 <sup>-10</sup>	dss	-1
Ω <sup>-</sup>	1672.4	3/2	0.8·10 <sup>-10</sup>	sss	-1
Λ <sub>c</sub> <sup>+</sup>	2285.0	½	1.8·10 <sup>-10</sup>	udc	1

**Mesones estables (hadrones)** Los mesones tienen número bariónico igual a cero. La paridad intrínseca es igual a -1. Las partículas π y η coinciden con sus antipartículas.

Partícula (antipartícula)	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Espín	Composición en quarks	Vida media (segundos)	Carga eléctrica
π <sup>+</sup> (π)	139.57	0	$\bar{d}u(\bar{u}d)$	2.6·10 <sup>-8</sup>	1(-1)
π <sup>0</sup>	134.97	0	$\bar{u}u / \bar{d}d$	0.8·10 <sup>-16</sup>	0
K <sup>-</sup> (K <sup>+</sup> )	493.6	0	$\bar{u}s(u\bar{s})$	1.2·10 <sup>-8</sup>	-1(1)
$\bar{K}^0$ (K <sup>0</sup> )	497.6	0	$\bar{d}s(d\bar{s})$	0.9·10 <sup>-10</sup> (K <sub>S</sub> ) 5.2·10 <sup>-8</sup> (K <sub>L</sub> )	0
η	548.8	0	$\bar{u}u / \bar{d}d / \bar{s}s$	0.7·10 <sup>-18</sup>	0

**Resonancias mesónicas:** N<sup>o</sup> bariónico=1 Paridad intrínseca=-1

Partícula	Carga eléctrica	Masa(MeV/c <sup>2</sup> )	Espín	Vida Media (segundos)	Composición en quarks
ρ <sup>-</sup>	-1	770	1	0.4·10 <sup>-23</sup>	$d\bar{u}$
ρ <sup>0</sup>	0	770	1	0.4·10 <sup>-23</sup>	$u\bar{u} / d\bar{d}$
ρ <sup>+</sup>	1	770	1	0.4·10 <sup>-23</sup>	$\bar{d}u$
ω	0	783	1	0.7·10 <sup>-22</sup>	$u\bar{u} / d\bar{d} / s\bar{s}$
η'	0	958	0	2.7·10 <sup>-21</sup>	$u\bar{u} / d\bar{d} / s\bar{s}$
Φ	0	1020	1	1.5·10 <sup>-22</sup>	$u\bar{u} / d\bar{d} / s\bar{s}$



disipada por efecto Joule en una resistencia  $R$  por una corriente alterna durante un periodo de tiempo  $T$  puede calcularse como

$$W_{CA} = \int_0^T P(t) dt$$

donde  $P(t)$  es la potencia instantánea disipada en la resistencia, que viene dada por el producto de la intensidad por la tensión, esto es:

$$P(t) = I(t)V(t)$$

Dado que la caída de tensión en la resistencia es  $V(t) = RI(t)$ , la energía disipada por la corriente *alterna* en esta resistencia puede escribirse como

$$W_{CA} = I_0^2 R \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = I_0^2 R \frac{T}{2} = I_{ef}^2 RT$$

que es precisamente el valor de la energía disipada por efecto Joule durante un periodo de tiempo  $T$  en dicha resistencia  $R$  si esta fuese recorrida por una corriente *continua* de valor  $I_{ef}$ , esto es,

$$W_{CC} = I_{ef}^2 RT$$

### 7.6.5. Análisis fasorial de circuitos de CA

Dado que el estudio de la corriente alterna implica el tratamiento de funciones con una dependencia temporal de tipo armónica, la introducción de los **fasores** asociados a estas funciones simplificará enormemente el cálculo matemático necesario. A una función armónica  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  se le hace corresponder un fasor  $\tilde{I}$  :

$$I(t) \rightarrow \tilde{I}$$

que viene dado por

$$\tilde{I} = I_0 e^{j\varphi}$$

de modo que

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t})$$

Una propiedad muy útil para el presente tema es la que relaciona la derivada temporal de una función armónica con su fasor asociado, esto es,

$$\frac{dI(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{I}$$

#### 7.6.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina.

Haciendo uso de las relaciones fasoriales apropiadas es posible expresar las relaciones fundamentales para resistencias, condensadores y bobinas en la siguiente forma:

- **Resistencia.**

La relación puede expresarse en forma fasorial simplemente como

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R}$$

o bien como

$$\boxed{\tilde{V} = R\tilde{I}}$$

- **Condensador.**

Para el condensador, haciendo uso de la propiedad, la relación puede expresarse como

$$\tilde{I} = j\omega C\tilde{V}$$

o equivalentemente

$$\boxed{\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}}$$

La expresión anterior suele también escribirse como

$$\tilde{V} = -jX_c\tilde{I}$$

Donde

$$X_c = \frac{1}{\omega C}$$

se denomina **reactancia capacitiva** y se expresa en ohmios ( $\Omega$ ). Esta magnitud *depende* de la frecuencia tendiendo a cero para frecuencias muy altas y a infinito para frecuencias muy bajas.

Esto se manifiesta en el hecho de que para frecuencias bajas el condensador se comporta como un elemento que apenas deja fluir la corriente mientras que a frecuencias altas casi no impide la circulación de la corriente.

- **Bobina.**

La relación para la bobina puede expresarse en forma fasorial como

$$\boxed{\tilde{V} = j\omega L\tilde{I}}$$

Si se define la **reactancia inductiva**,  $X_L$ , como

$$X_L = \omega L$$

la expresión fasorial puede también escribirse como

$$\tilde{V} = jX_L\tilde{I}$$

La reactancia inductiva viene dada en ohmios y es un parámetro que *depende* linealmente con la frecuencia, de modo que tiende a cero para frecuencias bajas y a infinito para frecuencias altas.

Podemos afirmar entonces que la bobina se comporta como un elemento que se opondría al paso de la corriente a medida que la frecuencia de ésta aumenta.

Es interesante observar que las relaciones tensión/intensidad para el condensador y la bobina fueron expresadas en el Apartado 7.6.2 mediante expresiones *diferenciales* han podido ser ahora reescritas como simples expresiones *algebraicas* mediante el uso de sus fasores asociados.

Es más, se ha encontrado que el fador  $\tilde{V}$  siempre puede relacionarse linealmente con el fador  $\tilde{I}$  mediante un parámetro genérico  $Z$ ,

$$\tilde{V} = Z\tilde{I}$$

que denominaremos **impedancia** y que, en general, es un número complejo (notar que NO es un fador):

$$Z = \begin{cases} R & \text{Resistencia} \\ -jX_C & \text{Condensador} \\ jX_L & \text{Bobina} \end{cases} \quad \text{Impedancia de una resistencia, condensador y bobina}$$

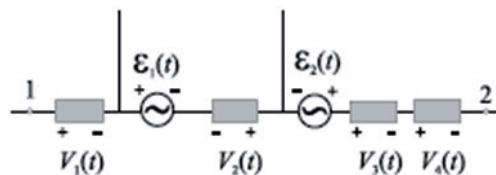
### 7.6.5.2. Reglas de Kirchhoff

Las reglas de Kirchhoff junto con las relaciones tensión/intensidad en los distintos elementos que constituyen los circuitos nos permitirán determinar el comportamiento de las magnitudes eléctricas en corriente alterna. Las reglas de Kirchhoff fueron introducidas en el apartado 7.2 para los circuitos de corriente continua, donde suponíamos que se había establecido una situación estacionaria (es decir, las magnitudes no variaban en el tiempo). En los circuitos de corriente alterna supondremos que las reglas de Kirchhoff siguen siendo válidas para cada instante de tiempo. En consecuencia podemos expresar las reglas de Kirchhoff de la siguiente manera:

- **Regla de kirchhoff para la tensión**

$$V_{12}(t) = \sum_j V_j(t) - \sum_i \varepsilon_i(t)$$

donde  $V_j(t)$  es la caída de potencial en el elemento  $j$ -ésimo y  $\varepsilon_i(t)$  es la  $i$ -ésima fem del recorrido.



En el ejemplo mostrado en la figura adjunta, la regla nos dice que

$$V_{12}(t) = [V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)] - [-\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)]$$

- **Regla de kirchhoff para las intensidades**

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0$$

esto es, en cada instante de tiempo, la suma de todas las intensidades que llegan y salen de un nudo es cero.

Las anteriores reglas pueden también expresarse en forma fasorial, adoptando entonces la siguiente forma:

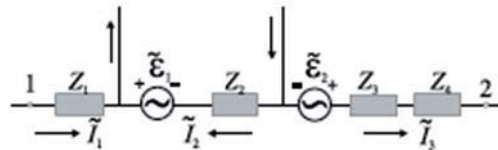
- **Regla de Kirchhoff fasorial para la tensión**

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j \tilde{V}_j - \sum_i \tilde{\varepsilon}_i$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j Z_j \tilde{I}_j - \sum_i \tilde{\varepsilon}_i$$

donde  $Z_j$  es la impedancia del elemento  $j$ -ésimo recorrido por la intensidad fasorial  $\tilde{I}_j$



En el ejemplo de la figura (siguiendo los criterios de signos ya explicados para los circuitos de corriente continua), obtenemos

$$\tilde{V}_{12} = Z_1 \tilde{I}_1 - Z_2 \tilde{I}_2 + (Z_3 + Z_4) \tilde{I}_3 - [-\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2]$$

- **Regla de Kirchhoff fasorial para las intensidades**

$$\sum_{i=1}^N \tilde{I}_i = 0$$

es decir, la suma de todas las intensidades fasoriales que llegan y salen de un nudo es cero.

### 7.6.5.3. Circuito RLC serie

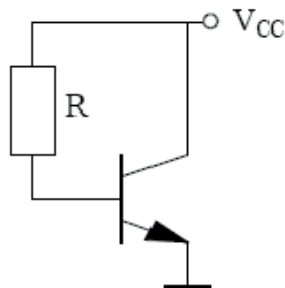
Debemos observar que las reglas de Kirchhoff tal como han sido establecidas anteriormente son "idénticas" a las reglas establecidas para corriente continua, considerando que ahora tenemos fasores e impedancias en vez de números reales y resistencias. Como un ejemplo sencillo de aplicación de las leyes de Kirchhoff fasoriales consideraremos a continuación un circuito RLC serie en corriente alterna.

### 8.5.2.4. Polarización del transistor

Polarizar un transistor bipolar implica conseguir que las corrientes y tensiones continuas que aparecen en el mismo queden fijadas a unos valores previamente decididos. Es posible polarizar el transistor en zona activa, en saturación o en corte, cambiando las tensiones y componentes del circuito en el que se engloba.

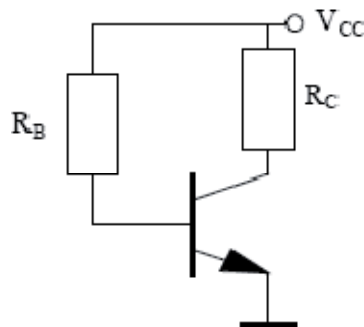
El transistor bipolar se emplea en numerosas aplicaciones, y en infinidad de circuitos diferentes. Cada uno de ellos lo polariza de forma determinada. En este apartado se abordará la polarización del transistor mediante una red de resistencias.

Supongamos que se quiere polarizar un transistor bipolar en zona activa. Se ha de conseguir que sus tensiones y corrientes cumplan las condiciones de estar en activa:  $V_{BE} = 0,7V, V_{CE} > 0,2V$ . Una primera opción sería usar el siguiente circuito.



Podemos ver cómo conseguimos polarizar la unión base-emisor mediante una resistencia R conectada a alimentación. Por la base del transistor circulará una corriente igual a  $\frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$ , y en colector-emisor tendremos  $V_{CE} = V_{CC} > V_{CE_{sat}}$ .

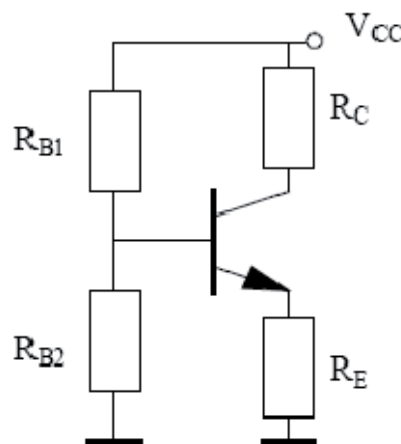
Este primer circuito tiene como inconveniente por un lado que el transistor nunca se podría polarizar en saturación, pues no se puede conseguir que  $V_{CE} = 0,2V$  siendo  $V_{BE} = 0,7V$ ; y por otro lado la excesiva disipación. Un circuito un poco más complejo, y con el que se puede conseguir polarizar al transistor en las tres regiones de funcionamiento es el siguiente.



Vemos que en este caso la tensión colector-emisor depende directamente de la corriente de base  $V_{CE} = V_{CC} - \beta I_B R_C$ , y dicha corriente se fija actuando sobre la resistencia de

base  $I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B}$ . Para polarizar el transistor en cada una de las regiones se pueden emplear las dos ecuaciones mencionadas y aplicar las restricciones de cada región.

Cuando se pretende que la polarización sea estable (es decir, que no varíe con factores externos<sup>1</sup>), se usan redes de polarización más complejas, que fijan la tensión en base, como por ejemplo esta.

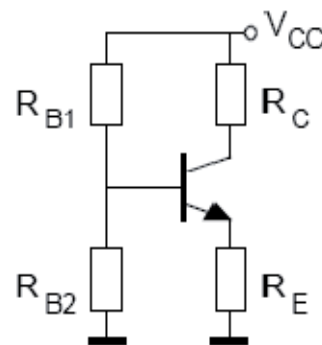


### 8.5.2.5. Ejemplo de resolución de ejercicio de polarización

Dado el circuito de la figura, y a partir de los datos suministrados, calcular todas las corrientes y tensiones.

DATOS:

Activa	$V_{BE} = 0.6V$
	$\beta = 99$
Saturación	$V_{BE} = 0.8V$
	$V_{CE} = 0.2V$
$R_C = 1K$	$R_E = 560 \Omega$
$R_{B1} = 47K$	$R_{B2} = 56K$
$V_{CC} = 12V$	



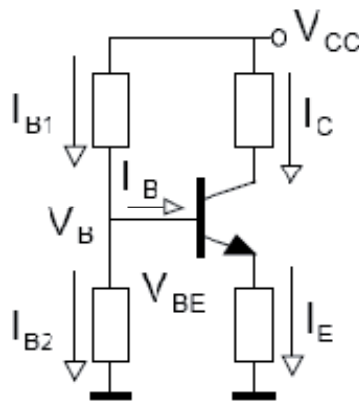
Siempre, a la hora de resolver un ejercicio de polarización con transistores bipolares, el primer paso es realizar una suposición sobre el estado en el que se encuentra el transistor (o los transistores si hay varios). Los estados posibles son activa, corte o saturación. En general, a no ser que la experiencia nos indique lo contrario, supondremos que el transistor está en activa, y a partir de ahí comenzará la resolución del ejercicio.

Una vez decidido que suponemos activa, resolvemos el circuito y se pueden presentar dos casos:

- que se compruebe que el transistor está en activa, con lo que habremos terminado
- que las corrientes y tensiones resultantes sean imposibles; en este caso la suposición de activa será incorrecta, elegiremos otro estado (corte o saturación), y volveremos a resolver.

En nuestro caso, una vez supuesto activa, el siguiente paso es analizar:

- de qué datos se dispone, y
- qué podemos averiguar a partir de dichos datos.



### Primera aproximación a la resolución

Observemos la figura. En ella se encuentran marcadas las diferentes tensiones y corrientes presentes en el circuito. De estas tensiones y corrientes sólo conocemos 2, que vienen dadas por los datos (recordemos la suposición de activa):

$$V_{BE} = 0,6V \text{ y } V_{CC} = 12V$$

Además, sabemos que, por estar el transistor en activa, se cumplen las siguientes relaciones:

$$I_C = \beta \cdot I_B \quad I_E = (\beta + 1) \cdot I_B$$

A partir de los datos anteriores hemos de plantear las ecuaciones que nos lleven a la resolución del ejercicio. Por ejemplo, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} V_B = V_{BE} + I_E \cdot R_E \\ V_{CC} - V_B = I_{B1} \cdot R_{B1} \\ I_{B1} = I_B + I_{B2} \\ I_{B2} = \frac{V_B}{R_{B2}} \\ I_E = (\beta + 1) \cdot I_B \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene 5 incógnitas ( $I_B$ ,  $I_E$ ,  $V_B$ ,  $I_{B1}$  e  $I_{B2}$ ). Despejando se resuelve el sistema y todo el circuito. Sin embargo este tipo de aproximación no resulta práctica, pues nos obliga a desarrollar bastante cálculo matemático que puede conducir a errores.

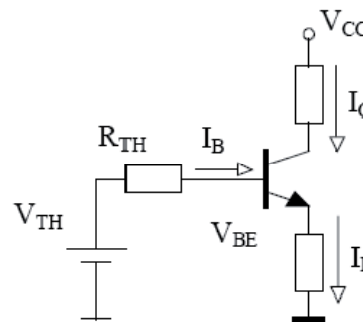
### Segunda aproximación a la resolución

Vamos ahora a intentar resolver el circuito de una forma más sencilla. Empezamos en el punto en el que se inició la primera aproximación, es decir, supuesto activa, y conocidas algunas tensiones y relaciones en el circuito, pero en este caso el estudiante con cierta práctica puede abordar el problema aplicando Thevenin al circuito de la base del transistor, y obteniendo la figura siguiente.

En esta figura la tensión y resistencia de Thevenin se obtienen:

$$V_{TH} = V_{CC} \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} = 12V \frac{56K}{47K + 56K} = 6,5V$$

$$R_{TH} = R_{B1} // R_{B2} = \frac{R_{B1} \cdot R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} = \frac{56K \cdot 47K}{56K + 47K} = 25K6$$



Y a partir de estos valores podemos plantear directamente una ecuación que resuelva la corriente de base, de la siguiente forma (teniendo en cuenta la relación que existe entre corriente de emisor y de base):

$$V_{TH} = I_B \cdot R_{TH} + V_{BE} + I_E \cdot R_E \Rightarrow V_{TH} = I_B \cdot R_{TH} + V_{BE} + (\beta + 1) \cdot I_B \cdot R_E$$

$$I_B = \frac{V_{TH} - V_{BE}}{R_{TH} + (\beta + 1) \cdot R_E} = \frac{6,5V - 0,6V}{25K6 + (99 + 1) \cdot 560\Omega} = 72,3\mu A$$

Una vez conocida la corriente de base, el resto de corriente y tensiones se obtienen inmediatamente:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 99 \cdot 72,3\mu A = 7,16mA$$

$$I_E = (\beta + 1) \cdot I_B = 100 \cdot 72,3\mu A = 7,23mA$$

Y a partir de estos valores se obtienen el resto de tensiones del circuito, es decir:

$$V_E = I_E \cdot R_E = 7,23mA \cdot 560\Omega = 4,1V$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C \cdot R_C - V_E = 12V - 7,16mA \cdot 1K - 4,1V = 0,74V$$

### Comprobaciones finales

Una vez resuelto hemos de comprobar que la suposición hecha al principio era correcta, es decir, que el transistor efectivamente se encontraba en activa. Para realizar esta comprobación basta con observar que todas las corrientes y tensiones obtenidas son coherentes, y además que se verifica que  $V_{CE} > V_{CE_{sat}}$ .



### 11.1.3.1. Suma Binaria.

La suma de dos cantidades binarias empieza con la suma de los dos dígitos menos significativos de los sumandos y un acarreo inicial de cero ó uno (Acarreo  $C_{in}$ ). Esta operación puede producir un bit de acarreo (Acarreo  $C_{out}$ ) para la suma de la siguiente posición significativa. En la tabla 11.1.4. las entradas  $A$ ,  $B$  y  $C_{in}$  denotan al primer sumando, el segundo sumando y el acarreo de entrada. Las salidas  $S$  y  $C_{out}$  representan a la suma y el acarreo de salida.

Sumando A	Sumando B	Acarreo $C_{in}$	Acarreo $C_{out}$	Suma S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabla 11.1.4. Suma binaria

#### Ejemplo

Efectuar la suma de 010110 y 101010.

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
 +\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Acarreo} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Comprobación en decimal:} \\
 22 \\
 +\ 42 \\
 \hline
 64 \quad (2^6)
 \end{array}$$

La suma de 2 magnitudes binarias en representación de complemento a 2, da como resultado la suma binaria en complemento a 2.

### 11.1.3.2. Resta Binaria.

En la resta binaria, los bits del minuendo de las columnas se modifican cuando ocurre un préstamo. En la tabla 11.1.5. las entradas  $A$ ,  $B$  y  $B_{in}$  denotan el minuendo, el sustraendo y el bit de acarreo. Las salidas  $D$  y  $C$  representan a la diferencia y el acarreo. La tabla muestra los resultados de una resta binaria de dos bits,

Minuendo A	Sustraendo B	Acarreo $B_{in}$	Acarreo C	Diferencia D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1

Minuendo A	Sustraendo B	Acarreo B <sub>in</sub>	Acarreo C	Diferencia D
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Tabla 11.1.5. Resta binaria

Para  $A=0$ ,  $B=0$  y  $B_{in}=1$ , hay que tomar prestado un 1 de la siguiente columna más significativa, lo cual hace  $P=1$  y agregar "en decimal" 2 a A. La resta  $2-0-1=1$ , da como resultado en binario  $D=1$ . Los acarreos se propagan hacia la izquierda de columna en columna.

*Ejemplo*

Restar  $1001_2$  de  $10011_2$ .

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 10011 \\
 -01001 \\
 \hline
 01010
 \end{array}$$

### 11.1.3.3. Desbordamiento.

El desbordamiento se presenta cuando la suma de la columna más significativa genera un acarreo. El desbordamiento sólo se puede producir cuando ambos números son positivos o negativos.

*Ejemplo*

Efectuar la suma de  $865_{10}$  y  $412_{10}$ .

$$\begin{array}{r}
 1 \quad \text{Acarreo} \\
 865 \\
 + \quad 412 \\
 \hline
 1207 \\
 \uparrow \\
 \text{Desbordamiento}
 \end{array}$$

*Ejemplo 2*

Efectuar la suma de  $110_2$  y  $110_2$ .

$$\begin{array}{r}
 11 \quad \text{Acarreo} \\
 110 \\
 + \quad 110 \\
 \hline
 1100 \\
 \uparrow \\
 \text{Desbordamiento}
 \end{array}$$

microprocesador tomará una a una las instrucciones que lo componen e irá realizando las tareas correspondientes.

Se denomina **ciclo de instrucción** al conjunto de acciones que se llevan a cabo en la realización de una instrucción. Se compone de dos fases:

**Fase de búsqueda:** En esta fase se transfiere la instrucción que se va a ejecutar desde la memoria central a la unidad de control.

**Fase de ejecución:** Consiste en la realización de todas las acciones que conlleva la propia instrucción.

#### 11.2.1.5. tecnologías CISC y RISC.

Una forma de clasificar los microprocesadores es en función de las instrucciones que son capaces de ejecutar. Podemos encontrar dos tipos:

**CISC (Complex Instructions Set Computer)**, Ordenador con un conjunto de instrucciones complejo.

**RISC (Reduced Instructions Set Computer)**, Ordenador con un conjunto de instrucciones reducido.

Si un microprocesador entiende y ejecuta muchas instrucciones (cientos de ellas), se trata entonces de un microprocesador CISC. En cambio, si el microprocesador entiende y ejecuta muy pocas instrucciones (decenas de ellas), se trata entonces de un microprocesador RISC.

Un micro CISC tarda mucho tiempo en ejecutar cada una de las instrucciones. En cambio, un micro RISC, como sólo entiende unas cuantas, su diseño interno le permite ejecutarlas en muy poco tiempo, y a una gran velocidad, mucho más rápido que un micro CSIC.

Cuando se desee que un microprocesador RISC ejecute cierta instrucción que no entiende, ésta se descompondría en varias instrucciones de las sencillas que sí entiende. Aún así, es capaz de operar mucho más rápido que el micro CSIC.

Prácticamente todos los microprocesadores que se utilizan en los ordenadores personales son de tecnología CSIC, poco a poco, van abandonando esta tecnología y la sustituyen por tecnología RISC.

#### 11.2.2. Unidad de Control (UC).

La UC se encarga de administrar todos los recursos de la computadora y dirigir todas sus actividades controlando cada elemento y cada acción, y estableciendo la comunicación entre la ALU, la memoria principal (MP) y el resto de componentes. La UC dirige la información a las distintas unidades en el momento adecuado mientras el procesador ejecuta cada una de las instrucciones de un programa. De forma más específica, las funciones de la UC son:

- Controlar la secuencia en que se ejecutan las instrucciones
- Controlar el acceso del procesador (CPU) a la MP

- Regular las temporizaciones de todas las operaciones que ejecuta la CPU
- Enviar señales de control y recibir señales de estado del resto de las unidades

La UC detecta las señales eléctricas de estado (mediante el Bus de Control) procedente de los distintos módulos del ordenador, que le indican el estado, situación o condición de funcionamiento de cada módulo. Capta de la memoria las instrucciones del programa y, de acuerdo con el código de operación de la instrucción en curso y con las señales de estado, genera las señales de control necesarias para que las distintas unidades se pongan a funcionar para permitir la ejecución de la instrucción.

La Unidad de control dispone de los siguientes elementos para realizar sus funciones:

- **Contador de Programa (CP):** Contiene en cada momento la dirección de memoria donde se encuentra la instrucción siguiente a ejecutar. Al iniciar la ejecución de un programa toma la dirección de su primera instrucción. Incrementa su valor en uno automáticamente cada vez que acaba una instrucción, salvo que ésta sea de salto o de ruptura.

- **Registro de Instrucción (RI):** Dedicado a memorizar temporalmente la instrucción que la UC está interpretando o ejecutando en ese momento. El programa que se está ejecutando reside en MP y la UC va buscando y captando las instrucciones secuencialmente, para interpretarlas y generar las órdenes de ejecución. La captación de una instrucción implica leerla de la memoria y almacenarla en el registro de instrucción. La instrucción que se está ejecutando lleva consigo un código de operación (CO) y unos operandos o la dirección de los mismos.

- **Decodificador (D):** Es el que interpreta realmente la instrucción. Se encarga de extraer el CO de la instrucción en curso, lo analiza y emite las señales necesarias al resto de elementos para su ejecución a través del secuenciador.

- **Reloj (R):** Proporciona una sucesión de impulsos eléctricos o ciclos a intervalos constantes, que marcan los instantes en que han de comenzar los pasos de que consta cada instrucción. De esta forma, se sincronizan todas las operaciones elementales de la computadora. La frecuencia de este reloj, medida en MegaHercios - Mhz - es un parámetro que determina en gran medida la velocidad de funcionamiento de la computadora.

- **Secuenciador (S):** En este dispositivo se generan órdenes muy elementales (microórdenes) que sincronizadas por el reloj hacen que se vaya ejecutando poco a poco la instrucción que está cargada en el registro de instrucción.

### 11.2.3. Memoria RAM y ROM

#### 11.2.3.1. ¿Qué es la memoria RAM?

Es la memoria de acceso aleatorio (Random Access Memory). Se llama de acceso aleatorio porque el procesador accede a la información que está en la memoria en cualquier punto sin tener que acceder a la información anterior y posterior.

En la mecánica clásica, la fuerza gravitatoria es una acción a distancia que, de manera muy aproximada, podemos suponer se transmite de forma instantánea, sin necesitar de ningún medio material para ello. Así, cada masa  $M$  crea un campo de fuerzas gravitatorio, campo vectorial caracterizado en cada punto por una intensidad  $i$ :

$$i \stackrel{\text{def}}{=} -G \frac{M}{r^3} r$$

La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa  $m$  será el producto de ésta por la intensidad del campo,

$$F = mi = -G \frac{Mm}{r^3} r$$

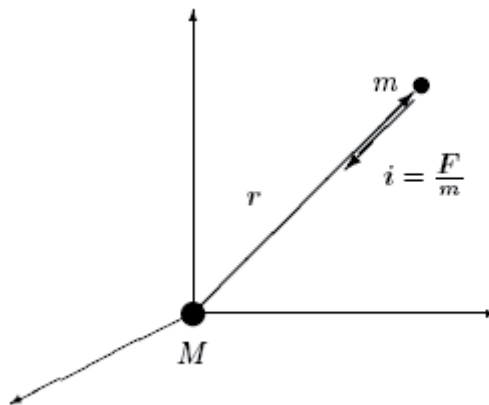


Figura 1.3: Atracción gravitatoria entre dos masas  $M$  y  $m$ , situadas a distancia  $r$

La teoría de la relatividad general elimina las fuerzas gravitatorias; para ello, interpreta el efecto de las masas como una modificación a la métrica espacio-tiempo, que resulta ser Riemanniana en lugar de Euclídea. Así, en esta nueva métrica, las trayectorias de las partículas corresponden a las geodésicas del espacio-tiempo, que vendrían a ser las ecuaciones horarias del movimiento.

### 12.1.4.3. Masa Gravitatoria y Masa Inerte.

En principio, el concepto de masa que interviene en la ley de la gravitación no tendría porqué coincidir con la masa empleada para la ley II de Newton; en el primer caso sirve para definir la fuerza gravitatoria, mientras que en el segundo define la fuerza de inercia. Podemos distinguirlas por tanto denominándolas  $m_g$  (masa gravitatoria) y  $m_i$  (masa inerte).

Existe, sin embargo, una observación experimental: en la superficie de la tierra todos los cuerpos caen en el vacío hacia el suelo con la misma aceleración ( $g$ ). Sea un cuerpo cualquiera en la superficie de la tierra; su peso es

$$w = G \frac{M_g m_g}{R^2}$$

donde  $M_g$  y  $m_g$  son las masas respectivas (gravitatorias) de la Tierra y del cuerpo,  $R$  es el radio de la tierra (suponemos el cuerpo a una altura  $h$  pequeña, por lo que  $R + h \approx R$ ), y  $G$  es la constante de la gravitación universal.

Empleando la segunda ley de Newton, se puede relacionar el peso con la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$w = m_i g;$$

siendo  $m_i$  la masa (inercial) del mismo. Igualando ambas expresiones de  $w$  se obtiene:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{M_g G}{\underbrace{g R^2}_{\text{constante}}}$$

Así, el cociente  $m_i/m_g$  permanece constante. Ya que  $G$  es una constante cuyo valor puede ser cualquiera, es posible elegir el mismo de forma que este cociente sea la unidad. De esta forma, ambas masas tendrían siempre igual valor:

$$M_i \equiv m_g$$

Para ello, el valor de la constante de la gravitación universal ha de ser

$$G = \frac{g R^2}{M}$$

**Consideraciones sobre el universo.** Supongamos que el universo tiene un tamaño finito, y que, de forma aproximada, se puede idealizar como una esfera, con una distribución de masa de densidad media  $\rho$ . Sea un cuerpo de masa  $m$ , situado a una distancia  $R$  del centro de dicha esfera; este experimentaría una fuerza atractiva hacia el centro del universo de valor:

$$F = \underbrace{\left( \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right)}_{\text{masa esfera}} \frac{mG}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \rho m G R.$$

Así, todos los cuerpos del universo experimentarían una aceleración hacia el centro de aquél de valor creciente proporcionalmente a su distancia  $R$ . Si esto fuese así, desde un punto distinto del centro del universo se observaría un movimiento diferente de las estrellas y galaxias según las distintas direcciones de observación; en la dirección del radio creciente,

la aceleración sería mayor, mientras que en la opuesta disminuiría. Sin embargo, esto no parece concordar con las observaciones experimentales medidas desde la Tierra.

¿Cómo se puede explicar esto, admitiendo que el universo es finito? Una posible explicación sería una teoría antropocéntrica, según la que el planeta Tierra tendría el inmenso privilegio de estar situado justo en el centro del universo. De esta forma, nuestras observaciones deberían ser iguales en cualquier dirección, ya que todas serían radiales.

Sin embargo, fuera de creencias pseudo-religiosas, la teoría antropocéntrica parece poco probable. Más bien, la observación anterior podría explicarse por una de las siguientes dos hipótesis:

1. El universo es homogéneo, isótropo e infinito. Sin embargo, esta suposición es incompatible con la teoría, generalmente aceptada en la actualidad, del "Big-Bang" como origen del universo. Esta primera explosión primigenia ocurrió al parecer hace unos diez mil millones de años, lo que establece un límite para el tamaño del universo.
2. El universo es finito, pero con una métrica no euclídea, en la que todos los puntos pueden considerarse el centro de los demás. Esta última hipótesis es la que parece más plausible, quedando por discutir el tipo de métrica, para lo cual existen a su vez distintas teorías.

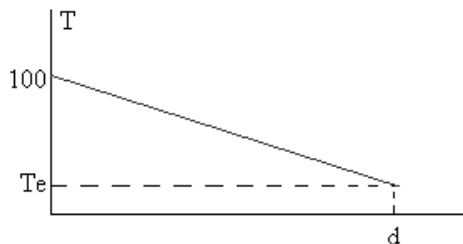
E. Mach interpretó la acción gravitatoria del resto del universo como responsable de la inercia de los cuerpos. Así, sería la masa del universo lejano la encargada de mantener un cuerpo con velocidad uniforme y rectilínea o en reposo ante la ausencia de otras fuerzas cercanas. Esto podría ser una bonita teoría, pero Mach lo dejó planteado tan sólo como una especulación, que carece de una justificación rigurosa.

**Tipos de fuerzas en el universo.** — Las fuerzas gravitatorias no son las únicas que existen en el universo físico. De forma esquemática se pueden distinguir cuatro tipos fundamentales de fuerzas, siendo las demás manifestaciones macroscópicas de éstas.

1. Fuerzas gravitatorias. Aunque en la mecánica clásica se consideran como acciones a distancia, de propagación instantánea, en la realidad parece que se propagan con velocidad finita. Esta propagación se realiza mediante las llamadas ondas gravitatorias. En la interpretación dual onda/corpúsculo equivalen a las partículas llamadas Gravitones.
2. Fuerzas electromagnéticas. Están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Se propagan mediante las Ondas electromagnéticas, que incluyen la luz, ondas de radio, etc. Las partículas equivalentes son los Fotones.
3. Fuerzas nucleares fuertes. Son las fuerzas que unen a las partículas en el núcleo atómico. Intervienen únicamente en la mecánica cuántica. Están asociadas a las partículas denominadas Gluones.
4. Fuerzas nucleares débiles. Son las fuerzas que intervienen en la desintegración nuclear. Asimismo intervienen en la mecánica cuántica, y las partículas asociadas son los Bosones.

### 12.11.2. Medida de la conductividad térmica

La ley de Fourier afirma que hay una proporcionalidad entre el flujo de energía  $J$  (energía por unidad de área y por unidad de tiempo), y el gradiente de temperatura  $dT/dx$ . La constante de proporcionalidad  $K$  es característica del material y se denomina conductividad térmica.



$$J = K \frac{T_A - T_B}{d}$$

Siendo  $d$  la longitud de la barra y  $(T_A - T_B)$  la diferencia de temperaturas entre sus extremos.

La cantidad de calor  $Q$  que llega al extremo superior de la barra en el tiempo  $t$  es  $JAt$ , siendo  $A$  el área de la sección de la barra.

$$Q = K \frac{T_A - T_B}{d} A \cdot l$$

Este calor se emplea en evaporar una masa  $m$  de líquido volátil en el tiempo  $t$ . Conocemos calor de vaporización es  $L$  de dicho líquido (calor necesario para pasar 1 kg de sustancia del estado líquido al estado gaseoso a la temperatura del cambio de estado).

$$Q = m \cdot L$$

Esta masa  $m$  de líquido que se ha convertido en vapor a la temperatura  $T_B$  de ebullición pasa por un tubo refrigerado con agua fría. La condensación del vapor da lugar a un volumen  $V = m/\rho$  de líquido. Siendo  $\rho$  la densidad del líquido volátil.

Obtenemos finalmente, la siguiente fórmula a partir de la cual despejamos la conductividad  $K$  de la barra metálica.

$$\rho V l = K \frac{T_A - T_B}{d} A \cdot l$$

#### Datos

La temperatura  $T_A = 100^\circ\text{C}$  es la temperatura de ebullición del agua contenida en el depósito inferior.

- Líquidos volátiles disponibles:

Líquido	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Calor latente $L$ (J/kg)	Temperatura de ebullición $T_B$ (°C)
Acetona	791	$524 \cdot 10^3$	56.2
Alcohol	790	$846 \cdot 10^3$	78.3
Benceno	879	$396 \cdot 10^3$	80.2
Eter	713.5	$351 \cdot 10^3$	34.6



- Barras metálicas disponibles

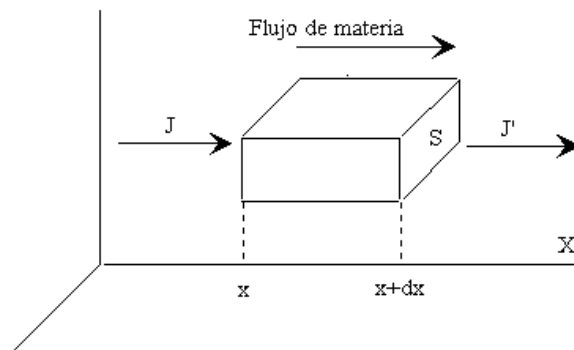
Metal	Conductividad térmica $K$ (W/m·K)
Aluminio	209.3
Acero	45
Cobre	389.6
Latón	85.5
Plata	418.7
Plomo	34.6

Fuente: Koshkin, Shirkévich. *Manual de Física Elemental*. Editorial Mir 1975.

### 12.11.3. Difusión unidimensional. Ley de Fick.

- Ley de Fick

La experiencia nos demuestra que cuando abrimos un frasco de perfume o de cualquier otro líquido volátil, podemos olerlo rápidamente en un recinto cerrado. Decimos que las moléculas del líquido después de evaporarse se difunden por el aire, distribuyéndose en todo el espacio circundante. Lo mismo ocurre si colocamos un terrón de azúcar en un vaso de agua, las moléculas de sacarosa se difunden por todo el agua. Estos y otros ejemplos nos muestran que para que tenga lugar el fenómeno de la difusión, la distribución espacial de moléculas no debe ser homogénea, debe existir una diferencia, o gradiente de concentración entre dos puntos del medio.



Supongamos que su concentración varía con la posición a lo largo del eje X. Llamemos  $J$  a la densidad de corriente de partículas, es decir, al número efectivo de partículas que atraviesan en la unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la dirección en la que tiene lugar la difusión. La ley de Fick afirma que la densidad de corriente de partículas es proporcional al gradiente de concentración

$$J = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

La constante de proporcionalidad se denomina coeficiente de difusión  $D$  y es característico tanto del soluto como del medio en el que se disuelve.

La acumulación de partículas en la unidad de tiempo que se produce en el elemento de volumen  $S \cdot dx$  es igual a la diferencia entre el flujo entrante  $J_S$ , menos el flujo saliente  $J'_S$ , es decir

$$J_S - J'_S = \frac{\partial J}{\partial x} S dx$$

La acumulación de partículas en la unida de tiempo es

$$(S dx) \frac{\partial n}{\partial t}$$

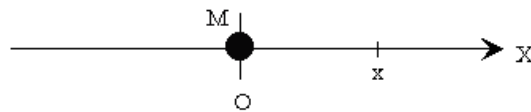
Igualando ambas expresiones y utilizando la Ley de Fick se obtiene

$$a^2 \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad \text{con} \quad a^2 = \frac{1}{D}$$

Ecuación diferencial en derivadas parciales que describe el fenómeno de la difusión .

- **Difusión unidimensional**

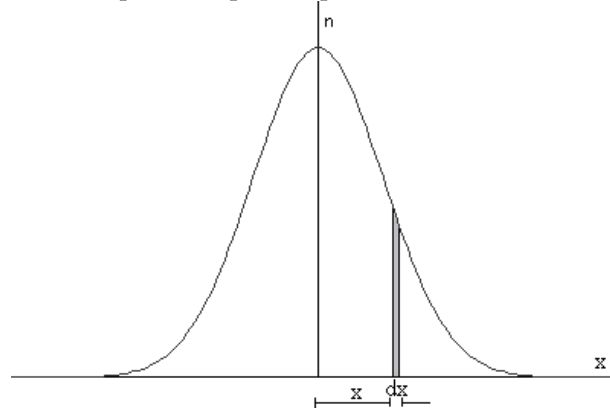
Vamos a considerar el problema de la difusión unidimensional de una masa  $M$  de soluto, situada en el origen de un medio unidimensional representado por el eje  $X$ .



La solución de la ecuación diferencial nos da la concentración en los puntos  $x$  del medio en cada instante de tiempo  $t$ .

$$n(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(\frac{-a^2 x^2}{4t}\right)$$

La cual se puede comprobarse por simple sustitución en la ecuación diferencial



### 13.4. Dinámica relativista.

#### 13.4.1. Expresión relativista del momento.

Partimos de un experimento sencillo, cuyo resultado es evidente: dos partículas con masas iguales y velocidades opuestas colisionan. Al final las partículas quedan unidas y su velocidad es nula. En mecánica clásica, este proceso conserva la masa, el momento y la energía. Es más, si cambiamos de referencia, haciendo uso de las transformaciones de Galileo, se cumplen las mismas leyes de conservación.

No obstante, hemos visto que las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz. Por ello, el proceso anterior en un sistema de referencia B que se mueve con respecto a A con velocidad  $u$ , el proceso se ve.

Si se considera que  $\vec{P} = \sum m\vec{v}$ , entonces el momento no se conservaría.

Para hacer consistente las transformaciones de Lorentz (que tienen su origen en la constancia de  $c$ ) con la conservación del momento (que tiene su origen en el principio de relatividad) es necesaria la redefinición del momento.

Einstein propone la expresión  $p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$  para una partícula cuya masa en reposo es

$m_0$  y su velocidad es  $v$ . Ello puede interpretarse como que la masa de una partícula en movimiento viene dada por  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ; por tanto, crece con la velocidad. El

momento sería entonces  $p = m(v) \cdot v$ .

Vamos a ver que dicha expresión es consistente con las transformaciones de Lorentz.

En el sistema A, la conservación de la masa implica que

$$m_{F0} = m_1(v) + m_2(v) = 2m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En el sistema B

$$m_{F0} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v-u)^2}{(1 - \frac{uv}{c^2})^2} \frac{1}{c^2}}} + m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-v-u)^2}{(1 + \frac{uv}{c^2})^2} \frac{1}{c^2}}} = 2m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Puede comprobarse que, a partir de la relación de masas del sistema A, se obtiene la relación en B

$$m_0 \frac{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v-u}{c}\right)^2}} + m_0 \frac{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v+u}{c}\right)^2}} = m_{F0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

En el sistema A, la conservación del momento se da trivialmente. En el sistema B, se tiene

$$m_1(v'_1) \cdot v'_1 + m_2(v'_2) \cdot v'_2 = -m_F(u) \cdot u$$

es decir,

$$\frac{m_0 \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v - u}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)} + \frac{m_0 \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{-v - u}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)} = m_F(u) \cdot u$$

De hecho, la  $p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$  es la única función de la velocidad que consistente con las

transformaciones de Lorentz. Nótese que para  $v \ll c$ , es  $m(v) = m_0$ , y  $p = m_0 v$ .

### 13.4.2. Expresión relativista de la energía. Energía en reposo.

La energía cinética es igual al trabajo necesario para llevar a una masa en reposo  $m_0$  hasta una velocidad  $v$ .

$$K = W(0 \rightarrow v) = \int F \cdot dx$$

De las ecuaciones de Newton,

$$F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}$$

es equivalente a

$$F = \frac{dp}{dt}$$

si  $m$  es constante.

Cuando se pasa a una situación relativista,  $m$  depende de  $v$  y ambas expresiones no son equivalentes. La que tiene sentido en un contexto relativista es  $F = \frac{dp}{dt}$ . En ese caso, como

### 14.5. Protección radiológica.

Protección Radiológica es la disciplina dedicada a la creación, desarrollo y aplicación de principios que garanticen que personal expuesto profesionalmente, público y pacientes no sufran efectos biológicos deterministas debidos a la radiación ionizante, y la probabilidad de aparición de efectos probabilistas quede limitada a un valor socialmente aceptable.

Las recomendaciones, normativa y principios de la Protección Radiológica han venido siendo desarrollados desde hace años por varios organismos:

- Comisión Internacional de Protección Radiológica (CIPR). Establece los principios básicos a nivel internacional.
- Organización Internacional de Energía Atómica (OIEA). Incorpora los principios a Normas Básicas de seguridad en materia de Protección Radiológica.
- Comité Científico de las Naciones Unidas para el Estudio de los Efectos de las Radiaciones Atómicas (UNSCEAR),...

En cualquier caso, los principios básicos son tres:

1. **Justificación.** Una actividad en que esté implicada emisión de radiaciones ionizantes sólo se llevará a cabo si da lugar a beneficio.
2. **Optimización.** Una vez que la actividad esté justificada, se llevará a cabo buscando que las dosis a que dé lugar se mantengan tan bajas como sea posible (ALARA)
3. **Limitación.** En ningún caso, la actividad dará lugar a valores individuales de dosis por encima de los límites establecidos para cada caso.

Los límites actualmente en uso en España están recogidos en el RD 53/1992 (y se recogen en el siguiente cuadro). Antes del 13 de Mayo del año 2000, deberían haberse reducido de acuerdo con la Directiva Europea 96/29/EURATOM del Consejo de la Unión Europea. De hecho este documento (su conversión a nuestra legislación) debería haber sustituido ya al RD 53/1992.

#### 14.5.1. Límite de dosis.

Límites de dosis según Real Decreto 53/1992:

PERSONA		LÍMITE ANUAL(mSv)	LÍMITE ESPECIAL(mSv)
Personal profesionalmente expuesto	Cuerpo entero	50	
	Manos	500	
	Piel	500	
	Cristalino	150	
Público (cuerpo entero)		5	

PERSONA	LÍMITE ANUAL(mSv)	LÍMITE ESPECIAL(mSv)
Estudiantes	Edad<16	0,5
	16<edad<18	15
	Edad>18	50
Mujeres (ppe)	Con capacidad de procrear	13 por trimestre
	Gestante	10 en el embarazo
Operaciones especiales planificadas*	Dosis de una vez	100
	En toda la vida profesional	250

\*Además no participan en operaciones especiales planificadas:

- Ppe que hayan recibido en los doce meses anteriores dosis superiores a 50 mSv.
- Ppe que hayan recibido antes más de 250 mSv por operaciones especiales.
- Mujeres con capacidad de procrear.
- Menores de 18 años.

#### 14.5.2. Protección radiológica operacional.

Las actividades de Protección Radiológica comienzan antes de poner en marcha la actividad generadora de radiaciones, se mantienen todo el tiempo de vigencia de la actividad, y en ocasiones permanecen incluso después de clausurada la instalación.

1. En primer lugar se requieren las correspondientes autorizaciones de las Autoridades Competentes (Reglamento de Instalaciones Nucleares y Radiactivas (1999)). Según el tipo de instalación radiactiva se requerirá presentar en el MINER sucesivamente:
  - Memoria Previa, Memoria de Construcción y Memoria de Puesta en Marcha para las instalaciones de 1ª categoría. P. e. : Central Nuclear.
  - Memoria de Construcción y Memoria de Puesta en Marcha para las instalaciones de 2ª categoría. P. e. : Acelerador de electrones de uso clínico.
  - Sólo Memoria de Puesta en Marcha para instalaciones de 3ª categoría. P. e.: Equipo de RX.
2. Para obtener las correspondientes autorizaciones, las memorias deben contener, entre otros puntos, un estudio coherente de los blindajes estructurales con que se dotará a la instalación.

Los blindajes que se utilizarán dependerán de:

- El tipo de partículas ionizantes y energías que se generarán.
- Si el haz que incide sobre la estructura es directo ó disperso (barrera primaria ó secundaria respectivamente).
- La ocupación de los espacios colindantes.
- La carga real de trabajo de la instalación (esto es, el porcentaje de tiempo sobre el total en que realmente se estén generando radiaciones).
- Los costes y facilidad de obtención y manejo del material de blindaje

del dibujo (véanse las figuras 2.8 y 2.9). Observamos que entre el campo incidente y el reflejado hay un cambio de fase  $\pi$  para los casos  $\parallel$  y  $\perp$

- Incidencia rasante. El coeficiente paralelo es positivo; por lo tanto, el sentido del vector es correcto. En el caso perpendicular el sentido no es correcto. Por lo tanto, el campo incidente y el reflejado están siempre en oposición de fase. Si extrapolamos estos argumentos para ángulos de incidencia intermedios, se puede inferir que siempre se tiene un cambio de fase  $\pi$  en la reflexión.
- Transmisión. Los coeficientes son siempre positivos. No hay ningún cambio en la orientación arbitraria de los vectores y, por lo tanto, podemos asegurar nunca hay cambio de fase  $\pi$ .
- CASO B:  $n > n'$ :  
Haciendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, podemos asegurar que, en estas condiciones, nunca se produce un salto de fase  $\pi$ , ni en reflexión ni en refracción.

#### 15.2.2.4 Factores de transmisión y reflexión en intensidad

Definimos los *factores de transmisión* como el cociente entre la intensidad transmitida y la incidente. Es necesario definir un factor para la componente paralela y otro para la perpendicular. Recordemos que la *intensidad* se define como la media temporal de la energía radiada por unidad de tiempo y de superficie. La definición de intensidad exige que la detección se realice con un detector situado normalmente a la dirección de propagación

Consideremos la situación de la figura 2.12. Una onda plana incide sobre una superficie de separación de medios con un ángulo respecto a la normal y se refracta formando un ángulo  $\varepsilon'$ . La comparación entre los vectores de Poynting se hará en la superficie de separación de los medios, aplicando el principio de conservación de la energía.

$\|\vec{S}\| \cos(\varepsilon)$  es la energía que incide en la superficie de separación por unidad de superficie.

Análogamente,  $\|\vec{S}\| \cos(\varepsilon')$  es la energía transmitida. Por lo tanto, el factor de transmisión en intensidad de la componente paralela será

$$T_{\parallel} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\langle \|S'_{\parallel}\| \rangle \cos \varepsilon'}{\langle \|S_{\parallel}\| \rangle \cos \varepsilon} = \frac{A_{\parallel}'^2 n' \cos \varepsilon'}{A_{\parallel}^2 n \cos \varepsilon} \quad (2.47)$$

Y, para la componente perpendicular,

$$T_{\perp} = \frac{A_{\perp}'^2 n' \cos \varepsilon'}{A_{\perp}^2 n \cos \varepsilon} \quad (2.48)$$

Si consideramos el factor de reflexión  $\varepsilon = \varepsilon'$  y  $n = n'$ , y por lo tanto, se puede escribir

$$R_{\parallel} = \frac{A_{\parallel}'^2}{A_{\parallel}^2} \quad R_{\perp} = \frac{A_{\perp}'^2}{A_{\perp}^2} \quad (2.49)$$

Como es natural, se debe verificar que

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (2.50)$$

y, para el caso de incidencia normal,

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4nn'}{(n+n')^2} \quad R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 \quad (2.51)$$

### 15.2.2.5 Estudio de la Reflexión Total

Cuando la luz llega a una superficie de separación de medios ( $n' < n$ ) con un ángulo superior al ángulo límite, toda la luz vuelve al primer medio. Recordemos que el ángulo límite se obtiene cuando se verifica que  $n \sin(\epsilon) = n' \sin(\pi/2)$ . Definamos  $N$  como,  $N = \sin(\epsilon) = n'/n$ .

La ley de Snell tiene un claro significado geométrico cuando trabajamos con medios dieléctricos y en las condiciones habituales. Podemos hacer la hipótesis siguiente: la ley de la refracción tiene una validez formal más allá de su significado intuitivo. Consideremos una onda plana incidente sobre una superficie de separación de medios con un ángulo  $\epsilon > \epsilon_1$  y  $n > n'$ . Aceptando la validez formal de la ley de Snell podremos escribir  $\sin(\epsilon') = \sin(\epsilon)/N$ . En el estudio que estamos realizando,  $\sin(\epsilon') > 1$ , y el valor de  $\cos(\epsilon')$  será, por tanto:

$$\cos \epsilon' = \pm \frac{i}{N} \sqrt{\sin^2 \epsilon - N^2} \quad (2.52)$$

donde  $\cos(\epsilon')$  es una magnitud imaginaria. Más adelante, por consideraciones de conservación de la energía, se despreciará el signo  $+$ . Conociendo el valor de  $\sin(\epsilon')$  y de  $\cos(\epsilon')$  podemos aplicar ahora las fórmulas de Fresnel. Analizando la figura 2.11, puede comprobarse que los factores de reflexión perpendicular y paralelo toman el valor 1 y 1 respectivamente, para ángulos de incidencia superiores al límite. Podemos estudiar con mayor detalle estos valores del ángulo de incidencia: las fórmulas del factor de reflexión para los dos casos de polarización son:

$$r_{\parallel}'' = \frac{\tan(\epsilon' - \epsilon)}{\tan(\epsilon' + \epsilon)} \quad r_{\perp}'' = \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin(\epsilon' + \epsilon)}$$

Puesto que conocemos los valores de  $\sin(\epsilon)$ ,  $\cos(\epsilon)$ ,  $\sin(\epsilon')$  y  $\cos(\epsilon')$ , podemos escribir las fórmulas de Fresnel en términos de valores conocidos. Después de hacer unas cuantas operaciones obtenemos que

$$r_{\parallel}'' = -e^{i\phi(\epsilon, n, n')} \quad r_{\perp}'' = -e^{i\theta(\epsilon, n, n')} \quad (2.53)$$

Este es un resultado interesante: los coeficientes de reflexión son complejos y de módulo 1. El valor de la amplitud no varía pero la onda incidente y reflejada estén desfasadas. La onda reflejada paralela tendrá por ecuación

$$\vec{E}_{\parallel}'' = \vec{A}_{\parallel} r_{\parallel}'' \exp(ip(ct - n\vec{r}s'')) = \vec{A}_{\parallel} \exp(ip(ct - n\vec{r}s'') + i\phi) \quad (2.54)$$

mientras que la componente perpendicular será

$$\vec{E}_{\perp}'' = \vec{A}_{\perp} r_{\perp}'' \exp(ip(ct - n\vec{r}s'')) = -\vec{A}_{\perp} \exp(ip(ct - n\vec{r}s'') + i\theta) \quad (2.55)$$

La onda reflejada estará polarizada elípticamente y sus componentes estarán



$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si  $A$  es ortogonal, entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

### 16.9.3.8. Matrices normales

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si  $AA^T = A^T A$ . Obviamente, si  $A$  es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Ejemplo:

Sea  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ , Entonces

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \text{ y } A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $AA^T = A^T A$ , la matriz es normal.

## 16.9.4. Operaciones con matrices

### 16.9.4.1. Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden  $3 \times 2$  y otra de  $3 \times 3$ , no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , entonces:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

### 16.9.4.2. Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz  $2 \times 3$  y la multiplicamos por otra de orden  $3 \times 5$ , la matriz resultante será de orden  $2 \times 5$ .

$$(2 \times 3) \times (3 \times 5) = (2 \times 5)$$

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación.  $(3 \times 5)$  por  $(3 \times 2)$

puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  son matrices tales que el número de columnas de  $A$  coincide con el número de filas de  $B$ ; es decir,  $A$  es una matriz  $m \times p$  y  $B$  una matriz  $p \times n$ . Entonces el producto  $AB$  es la matriz  $m \times n$  cuya entrada  $ij$  se obtiene multiplicando la fila  $i$  de  $A$  por la columna  $j$  de  $B$ .

Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

*Ejemplo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

### 16.9.4.3. Producto por un escalar

El producto de un escalar  $k$  por la matriz  $A$ , escrito  $k \cdot A$  o simplemente  $kA$ , es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de  $A$  por  $k$ :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

*Ejemplo:*

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ , Entonces:  $3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$

#### 16.9.4.4. División de matrices

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices  $A$  y  $B$  tal que  $A/B = AB^{-1}$ :

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

*Ejemplo:*

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ , y  $k=2$  un escalar. En este caso:

$$\frac{A}{k} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

#### 16.9.5. Matrices invertibles

Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es invertible, si existe una matriz  $B$  con la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

siendo  $I$  la matriz identidad. Denominamos a la matriz  $B$  la inversa de  $A$  y la denotamos por  $A^{-1}$ .

*Ejemplo:*

Supongamos  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y } BA = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que  $AB = BA = I$ ,  $A$  y  $B$  son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

##### 16.9.5.1. Método de Gauss

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Para calcular la matriz inversa de  $A$ , que denotaremos como  $A^{-1}$ , seguiremos los siguientes pasos:

**Paso 1.** Construir la matriz  $n \times 2n$   $M = (A:I)$  esto es,  $A$  está en la mitad izquierda de  $M$  y la matriz identidad  $I$  en la derecha.

**Paso 2.** Se deja tal y como está la primera fila de  $M$ , y debajo del primer término de la diagonal principal,  $a_{11}$ , que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo.

Consideremos una matriz  $3 \times 3$  arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$